॥ श्रीः ॥

हरिदास-संस्कृत-ग्रन्थमाला

१२८

उपपत्ति-परिशिष्टाभ्यां परिष्कृतः

रेखागणित-षष्ठाध्यायः ।

[परिभाषारूप-पञ्चमाध्यायसहितः]

ज्योतिर्विद्-पं० श्रीमुरलीधरठक्कुरेण सम्पादितः



प्रकाशकः—
कृष्णदास-हरिदास गुप्तः
चौखम्बा संस्कृत सीरिज आफिस,
बनारस सिटी ।
[वि० १९९७] —— [द्वितीयावृत्तिः]

HARIDÂS SANSKRIT SERIES
128



THE

REKHĀGAṆITA

(CHAPTERS V-VI.)



With easy and exhaustive proofs appended with some very useful & important prepositions for the devlopment of Knowledge of the candidates for whom it is meant.

BY

Jyautis'āchārya
PANDIT S'RĪ MURALIDHAR THĀKUR
Prof. Srī Rudra Pratāpa Sanskrit Vidyalay, Bhagalpur.



PUBLISHED BY
JAYA KRISHNA DĀS HARIDĀS GUPTA
The Chowkhamba Sanskrit Series Office,
Benares City.



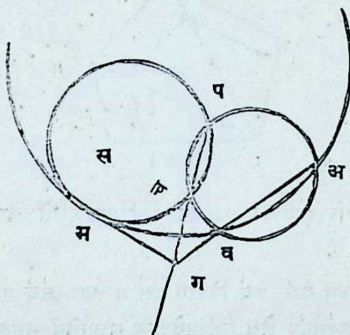
1941.

PRINTED AT THE
VIDYA VILAS PRESS,
BENARES CITY.

1941.

अथ नवमः प्रश्नः ।

एकं वृत्तं तथा विधेयं यन्निर्दिष्टबिन्दुद्वयगतं निर्दिष्टवृत्तं च स्पृशेत् ।



अ, व बिन्दू तथा स वृत्तं च निर्दिष्टम् । अत्रैकं वृत्तं तथा कार्यं यत् अ, व बिन्दुद्वयगतं स वृत्तं च स्पृशति ।

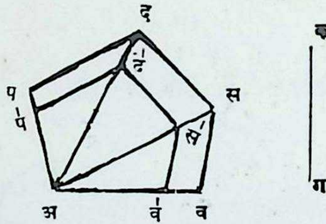
अथ अ, व बिन्दुगतमेकं अवचप वृत्तं कार्यं यत स वृत्तं प, च बिन्द्वोश्छिनत्ति । कल्प्यते वर्धितयोः पच, अव रेखयोर्योगबिन्दुः ग । ग बिन्दोः स निर्दिष्टवृत्तस्य गम स्पर्शरेखाकरणेन अवम बिन्दुत्रयवृत्तं स गत वृत्तं म बिन्दौ स्पृशति ।

अत्रोपपत्तिः । यतो अग · वग = गम²

∴ अवम वृत्तं गम रेखामपि म बिन्दौ स्पृशति । परं च गम रेखा स निर्दिष्टवृत्तस्य स्पर्शरेखेति पूर्वमेव विदितम् । अतो अवम वृत्तं स वृत्तं म बिन्दौ स्पृशति । उपपन्नं सर्वम् ।

दशमः प्रश्नः ।

निर्दिष्टरेखोपरि निर्दिष्टबहुभुजसजातीयं क्षेत्रं चिकीर्षितम् ।



कल्प्यते कग निर्दिष्टरेखोपरि अवसदप निर्दिष्टबहुभुजक्षेत्रसजातीयं क्षेत्रं कर्तव्यमस्ति ।

अव रेखायां कग समं अव̍ विधाय व̍स̍ ॥ वस, स̍द̍ ॥ दस तथा प̍द̍ ॥ पद विधेया । तदा अव̍स̍द̍प̍ क्षेत्रं निर्दिष्टक्षेत्रस्य सजातीयं भविष्यति ।

अत्रोपपत्तिः । अवस, अव̍स̍, त्रिभुजे, असद, अस̍द̍, त्रिभुजे एवं अदप, अद̍प̍ त्रिभुजे च मिथः समकोणके भवतः ।

$$\therefore \frac{अव̍}{अव} = \frac{व̍स̍}{वस} = \frac{स̍द̍}{सद} = \frac{द̍प̍}{दप} = \frac{अप̍}{अप}$$

∴ अव̍स̍द̍प̍ बहुभुजं अवसदप निर्दिष्टबहुभुजक्षेत्रेण सजातीयं संजातम् । उपपन्नं सर्वम् ।

इदमेव क्षेत्रं षष्ठाध्यायस्याष्टादशी प्रतिज्ञया प्रकारान्तरेणैव प्रतिपादितम् ।

समाप्तश्चायं ग्रन्थः ।

DATE DUE

२६०.५:२४

॥ श्रीः ॥

रेखागणितस्य

षष्ठाध्यायः

मङ्गलाचरणम्—

प्रणम्य नीलादिसरस्वतीं तां ब्रह्मादिदेवैः स्तुतपादपद्माम् ।
गुरोश्च पादाब्जयुगं हि षष्ठाध्यायं ब्रुवे क्षेत्रमितौ सुबोधम् ॥

पूर्वोपपादितेऽध्यायचतुष्टये रेखागणिते केवलानां क्षेत्रमितिक्रप्रमाणानां समन्यूनाधिकत्वेन सह परिचिताः सन्ति रेखागणितविदो विद्वांसः । इह तु तेषां सम्बन्धो निष्पत्तिर्वा निरूप्यते ।

(१) द्वयोराश्योर्मध्ये महानेकोऽन्येन लघुना राशिना यावता भागेन ह्रीयते तद्भागप्रमाणमेवात्रानयोः सम्बन्धो निष्पतिर्वा व्यपदिश्यते । तत्त्वधस्तनसङ्केतेन लिख्यते ।

यथा अ : क = ग,

$$\text{वा}, \frac{\text{अ}}{\text{क}} = \text{ग}, \text{वा}, \frac{\text{प}}{\text{च}} = \text{म},$$

प : च = म

अत्र ग, म आभ्यां क्रमेण अ, क अनयोः प, च अनयोर्वा सम्बन्धः सूच्यते । यत्र अ, क वा प, च भाज्यहरावंशलवौ वा कथ्येते ।

(२) येषां राशीनां सम्बन्धः समानस्ते समसम्बन्धिनः सजातीया वा कथ्यन्ते ।

यथा अ : क = ग, प : च = म,

यद्यत्र ग = म, तदा अ : क = प : च अतोऽत्र अ, क प, च समानसम्बन्धिनो निगद्यन्ते ।

(३) ये किल समसम्बन्धिनस्त एवानुपातीयाश्चोच्यन्ते ।

यथा $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$ अत्र अ, क, ग, घ सजातीयाः कथ्यन्ते तथा तेभ्य-एवानुपातो भवतीति ।

(४) अनुपातीयेषु भाज्यहरयोः परिवर्तनेन या निष्पत्तिःसाचोत्क्रमनिष्पत्तिः कथ्यते ।

पूर्वोक्तोदाहरणे—

यथा अ : क = ग : घ वा $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$

∴ क: अ = घ : ग वा, $\frac{क}{अ} = \frac{घ}{ग}$

इति उत्क्रमनिष्पत्तिः ।

(५) अनुपातीयेषु चतुर्षु प्रथमतृतीययोर्द्वितीयचतुर्थयोश्च ग्रहणेन यः सम्बन्धः सचैकान्तरसम्बन्धो व्यवह्रीयते ।

यथा अ : क = ग : घ वा, $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$

∴ अ : ग = क : घ वा, $\frac{अ}{ग} = \frac{क}{घ}$

एकान्तरनिष्पत्तिः ।

(६) तिसृष्वनुपातीयेषु प्रथमतृतीययोर्या निष्पत्तिः सैव चेद्द्वितीयतृतीययोरपि भवेत्तदा द्वितीयो राशिःप्रथमतृतीययोर्मध्यसम्बन्धीति व्यपदिश्यते ।

यथा अ : क = क : ग वा, $\frac{अ}{क} = \frac{क}{ग}$

तदाऽत्र क अ, ग अनयोर्मध्यसम्बन्धीयः ।

एवं यत्र अ : क = ग : घ अत्र ग तृतीयसम्बन्धी तथा घ चतुर्थसम्बन्धी चोच्यते ।

(७) चतुर्ष्वनुपातीयेषु राशिषु प्रथमतृतीयौ द्वितीयचतुर्थौ च समानजातीयौ भवतः ।

यथा $\text{अ} : \text{क} = \text{ग} : \text{घ}$

वा $\frac{\text{अ}}{\text{अ}} = \frac{\text{ग}}{\text{घ}}$

अत्र अ, क ग, घ चत्वारः अनुपातीया राशयः । यत्र अ, ग तथा क, घ समानजातीयौ स्तः ।

(८) समसम्बन्धेषु भाज्यहरयोर्वर्गघनादावपि सम्बन्धः समान एव भवति ।

यथा $\frac{\text{अ}}{\text{क}} = \frac{\text{ग}}{\text{घ}} = \text{च}$ कल्प्यते ।

तदा $\text{अ} = \text{क} \cdot \text{च}$

$\therefore \text{अ}^{२} = \text{क}^{२} \cdot \text{च}^{२}$

एवं $\text{ग} = \text{घ} \cdot \text{च}$

$\therefore \text{ग}^{२} = \text{घ}^{२} \cdot \text{च}^{२}$

$\therefore \frac{\text{अ}^{२}}{\text{क}^{२}} = \text{च}^{२}$

एवं $\frac{\text{ग}^{२}}{\text{घ}^{२}} = \text{च}^{२}$

$\therefore \frac{\text{अ}^{२}}{\text{क}^{२}} = \frac{\text{ग}^{२}}{\text{घ}^{२}}$

वा, $\text{अ}^{२} : \text{क}^{२} = \text{ग}^{२} : \text{घ}^{२}$ उपपन्नम् ।

(९) अनुपातीयेषु चतुषराशिषु योगान्तरनिष्पत्तिः समैव स्यात् ।

यथा अ, क, ग, घ अनुपातीयाः ।

$\therefore \frac{\text{अ}}{\text{क}} = \frac{\text{ग}}{\text{घ}}$ परिभाषया ।

$\therefore \frac{\text{अ}}{\text{क}} + १ = \frac{\text{ग}}{\text{घ}} + १$

वा, $\frac{\text{अ} + \text{क}}{\text{क}} = \frac{\text{ग} + \text{घ}}{\text{घ}}$

वा, $\text{अ} + \text{क} : \text{क} = \text{ग} + \text{घ} : \text{घ}$

(३) ये किल समसम्बन्धिनस्त एवानुपातीयाश्चोच्यन्ते ।

यथा $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$ अत्र अ, क, ग, घ सजातीयाः कथ्यन्ते तथा तेभ्य-एवानुपातो भवतीति ।

(४) अनुपातीयेषु भाज्यहरयोः परिवर्तनेन या निष्पत्तिःसाचोत्क्रमनिष्पत्तिः कथ्यते ।

पूर्वोक्तोदाहरणे—

यथा अ : क = ग : घ वा $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$

∴ कः अ = घ : ग वा, $\frac{क}{अ} = \frac{घ}{ग}$

इति उत्क्रमनिष्पत्तिः ।

(५) अनुपातीयेषु चतुर्षु प्रथमतृतीययोर्द्वितीयचतुर्थयोश्च ग्रहणेन यः सम्बन्धः सचैकान्तरसम्बन्धो व्यवह्रीयते ।

यथा अ : क = ग : घ वा, $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$

∴ अ : ग = क : घ वा, $\frac{अ}{ग} = \frac{क}{घ}$

एकान्तरनिष्पत्तिः ।

(६) तिसृष्वनुपातीयेषु प्रथमतृतीययोर्या निष्पत्तिः सैव चेद्द्वितीयतृतीययोरपि भवेत्तदा द्वितीयो राशिःप्रथमतृतीययोर्मध्यसम्बन्धीति व्यपदिश्यते ।

यथा अ : क = क : ग वा, $\frac{अ}{क} = \frac{क}{ग}$

तदाऽत्र क अ, ग अनयोर्मध्यसम्बन्धीयः ।

एवं यत्र अ : क = ग : घ अत्र ग तृतीयसम्बन्धी तथा घ चतुर्थसम्बन्धी चोच्यते ।

(७) चतुर्ष्वनुपातीयेषु राशिषु प्रथमतृतीयौ द्वितीयचतुर्थौ च समानजातीयौ भवतः ।

$$\text{यथा अ : क = ग : घ}$$

$$\text{वा } \frac{\text{अ}}{\text{अ}} = \frac{\text{ग}}{\text{घ}}$$

अत्र अ, क ग, घ चत्वारः अनुपातीया राशयः । यत्र अ, ग तथा क, घ समानजातीयौ स्तः ।

(८) समसम्बन्धेषु भाज्यहरयोर्वर्गघनादावपि सम्बन्धः समान एव भवति ।

$$\text{यथा } \frac{\text{अ}}{\text{क}} = \frac{\text{ग}}{\text{घ}} = \text{च कल्प्यते ।}$$

$$\text{तदा अ = क · च}$$

$$\therefore \text{अ}^{२} = \text{क}^{२} \cdot \text{च}^{२}$$

$$\text{एवं ग = घ-च}$$

$$\therefore \text{ग}^{२} = \text{घ}^{२} \cdot \text{च}^{२}$$

$$\therefore \frac{\text{अ}^{२}}{\text{क}^{२}} = \text{च}^{२}$$

$$\text{एवं } \frac{\text{ग}^{२}}{\text{घ}^{२}} = \text{च}^{२}$$

$$\therefore \frac{\text{अ}^{२}}{\text{क}^{२}} = \frac{\text{ग}^{२}}{\text{घ}^{२}}$$

$$\text{वा, अ}^{२} : \text{क}^{२} = \text{ग}^{२} : \text{घ}^{२}$$

उपपन्नम् ।

(९) अनुपातीयेषु चतुषराशिषु योगान्तरनिष्पत्तिः समैव स्यात् ।

यथा अ, क, ग, घ अनुपातीयाः ।

$$\therefore \frac{\text{अ}}{\text{क}} = \frac{\text{ग}}{\text{घ}} \text{ परिभाषया ।}$$

$$\therefore \frac{\text{अ}}{\text{क}} + १ = \frac{\text{ग}}{\text{घ}} + १$$

$$\text{वा, } \frac{\text{अ} + \text{क}}{\text{क}} = \frac{\text{ग} + \text{घ}}{\text{घ}}$$

$$\text{वा, अ+क : क = ग+घ : घ}$$

इति योगनिष्पत्तिः । (componendo)

$$\text{तथा च} \quad \frac{\text{अ}}{\text{क}} - १ = \frac{\text{ग}}{\text{घ}} - १$$

$$\text{वा,} \quad \frac{\text{अ} - \text{क}}{\text{क}} = \frac{\text{ग} - \text{घ}}{\text{घ}}$$

वा, अ − क : क = ग − घ : घ

इत्यन्तरनिष्पत्तिः । (devidendo)

एवमेव पूर्वसिद्धान्ताभ्यां—

$$\frac{\text{अ} + \text{क}}{\text{क}} = \frac{\text{ग} + \text{घ}}{\text{घ}}$$

$$\text{तथा} \quad \frac{\text{अ} - \text{क}}{\text{क}} = \frac{\text{ग} - \text{घ}}{\text{घ}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{अ} + \text{क}}{\text{अ} - \text{क}} = \frac{\text{ग} + \text{घ}}{\text{ग} - \text{घ}}$$

इति योगान्तरनिष्पत्तिः । (componendo and devidendo)

(१०) अनेकेषु समानसम्बन्धेषु भाज्ययोगहरयोगयोर्निष्पत्तिः प्रत्येकनिष्पत्त्या समा भवतीति ।

$$\text{यथा} \quad \frac{\text{अ}}{\text{क}} = \frac{\text{ग}}{\text{घ}} = \frac{\text{च}}{\text{प}} = \frac{\text{ज}}{\text{त}} \cdots\cdots$$

$$\text{तदा} \quad \frac{\text{अ} + \text{ग} + \text{च} + \text{ज} + \cdots\cdots}{\text{क} + \text{घ} + \text{प} + \text{त} + \cdots\cdots} = \frac{\text{अ}}{\text{क}} \quad \text{भविष्यति ।}$$

$$\text{अत्र कल्प्यते} \quad \frac{\text{अ}}{\text{क}} = \frac{\text{ग}}{\text{घ}} = \frac{\text{च}}{\text{प}} = \frac{\text{ज}}{\text{त}} \cdots\cdots = \text{न}$$

∴ अ = क · न

ग = घ · न

च = प · न

ज = त · न

. . . .

. . . .

सर्वेषां योगेन—

$$अ+ग+च+ज+ \cdots\cdots = न\,(क+घ+प+त+ \cdots\cdots)$$

$$\therefore \frac{अ+ग+च+ज+ \cdots\cdots}{क+घ+प+त+ \cdots\cdots} = न = \frac{अ}{क}$$ उपपन्नम् ।

(अनु) यदि $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ} = \frac{च}{प}$

तदा $\frac{अ \cdot न + ग \cdot म + च \cdot स}{क \cdot न + घ \cdot म + प \cdot स} = \frac{अ}{क}$ भविष्यतीति ।

अत्र न, म, स धनात्मिका अधनात्मिका वा संख्याः सन्ति ।

अत्रापि कल्प्यते $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ} = \frac{च}{प} = ह$

वा, $\frac{अ \cdot न}{क \cdot न} = \frac{ग \cdot म}{घ \cdot म} = \frac{च \cdot स}{प \cdot स} = ह$

$\therefore$ अ · न = क · न · ह

ग · म = घ · म · ह

च · स = प · स · ह

योगेन—

$$अ \cdot न + ग \cdot म + च \cdot स = ह\,(क \cdot न + घ \cdot म + प \cdot स)$$

$$\therefore \frac{अ \cdot न + ग \cdot म + च \cdot स}{क \cdot न + घ \cdot म + प \cdot स} = ह = \frac{अ}{क}$$ उपपन्नम् ।

(११) समसम्बन्धेषु प्रथमराशेर्द्वितीयो राशिर्यावता न्यूनोऽधिको वा स्यात्तावतैव तृतीयाच्चतुर्थो भवतीति ।

(१२) यावत्यो निष्पत्त्यः कयाचिदेकया निष्पत्त्या समानाः स्युस्ताः सर्वा मिथः समाना भवेयुः ।

यथा अ : क = $\frac{स}{र}$ तथा $\frac{ग}{घ} = \frac{स}{र}$

$\therefore$ अ : क = ग : घ उपपन्नम् ।

यदि अ : क = ग : घ

तदा $\frac{म \cdot अ}{न \cdot क} = \frac{म \cdot ग}{न \cdot घ}$ भविष्यति ।

∵ अ : क = ग : घ

वा, $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$

एकान्तरनिष्पत्त्या—

$\frac{अ}{ग} = \frac{क}{घ}$

वा, $\frac{म \cdot अ}{म \cdot ग} = \frac{न \cdot क}{न \cdot घ}$

∴ $\frac{म \cdot अ}{न \cdot क} = \frac{म \cdot ग}{न \cdot घ}$ ——

वा म · अ : न · क = म·ग : न·घ उपपन्नं यथोक्तम् ।

(१३) यद्यनेकेषु राशिष्वेकराशिना समा निष्पत्तिस्तदा ते सर्वे मिथः समाना भवेयुः ।

यथा अ : क = ग : क

$\frac{अ}{क} = \frac{ग}{क}$

∴ अ = ग उपपन्नम् ।

(१४) केषाञ्चन राशीनां परस्परं या निष्पत्तिः सैव समानगुणकगुणितानामपि भवतीति ।

यथा अ : क = ग : घ

तदा म · अ : क·म = ग · न : घ · न भविष्यति

∵ अ : क = ग : घ

वा, $\frac{अ}{क} = \frac{ग}{घ}$

∴ $\frac{म \cdot अ}{म \cdot क} = \frac{न \cdot ग}{न \cdot घ}$

वा, म · अ : म· क = न ग : न · घ उपपन्नम्

(१५) तुल्यराशीनामेकराशिना समानैव निष्पत्तिः ।

यथा $\text{अ} : \text{क} = \text{क} : \text{ग}$

अत्र यदि $\text{अ} = \text{क}$

तदा $\text{अ} : \text{ग} = \text{क} : \text{ग}$

तथा $\text{ग} : \text{अ} = \text{ग} : \text{क}$ भविष्यति ।

$\because \frac{\text{अ}}{\text{क}} = \frac{\text{क}}{\text{ग}}$

तथा $\text{अ} = \text{क}$

$\therefore \frac{\text{अ}}{\text{ग}} = \frac{\text{क}}{\text{ग}}$

वा, $\text{अ} : \text{ग} = \text{क} : \text{ग}$

उत्क्रमनिष्पत्त्या—

$\text{ग} : \text{अ} = \text{ग} : \text{क}$ उपपन्नम् ।

(१५) तिसृषु राशिषु प्रथमतृतीययोः सम्बन्धश्चेत् द्वितीयतृतीययोः सम्बन्धादधिको न्यूनो वा स्यात्तदा प्रथमो राशिरपरस्मादधिको न्यूनो वा भवतीति ।

यथा $\text{अ} : \text{ग} > \text{क} : \text{ग}$

तथा $\text{अ} : \text{ग} < \text{क} : \text{ग}$

तदा $\text{अ} > \text{क}$,

तथा $\text{अ} < \text{क}$, इति भाविष्यति ।

$\because \text{अ} : \text{ग} > \text{क} : \text{ग}$

वा, $\frac{\text{अ}}{\text{ग}} > \frac{\text{क}}{\text{ग}}$

$\therefore \text{अ} > \text{क}$

एवमेव—

$\text{अ} : \text{ग} < \text{क} : \text{ग}$

वा $\frac{\text{अ}}{\text{ग}} > \frac{\text{क}}{\text{ग}}$

$\therefore \text{अ} < \text{क}$ उपपन्नम् ।

(१६) यदि अ, क, ग - - - - - - - च एषां क्रमसम्बन्धाः य, र, ल- - - - - - - स एषां क्रमिकसम्बन्धेन च समानास्तदा प्रथमपक्षस्याद्यान्तिमयोः सम्बन्धो द्वितीयस्याद्यान्तिमसम्बन्धेन समो भवतीति ।

यथा $\frac{अ}{क} = \frac{य}{र}$

$\frac{क}{ग} = \frac{र}{ल}$

- - - - - - -

- - - - - - -

अतः $\frac{अ}{च} = \frac{य}{स}$ भविष्यति ।

$\because \frac{अ}{क} = \frac{य}{र}$

तथा $\frac{क}{ग} = \frac{र}{ल}$

$\frac{ग}{च} = \frac{ल}{स}$

$\therefore \frac{अ}{क} \times \frac{क}{ग} \times \frac{ग}{च} = \frac{य}{र} \times \frac{र}{ल} \times \frac{ल}{स}$

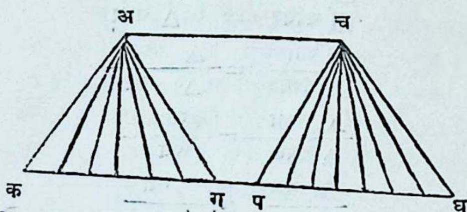
$\therefore \frac{अ}{च} = \frac{य}{स}$ उपपन्नं यथोक्तम् ।

(१७) येषां बहुभुजक्षेत्राणां कोणाः समानास्तथा कोणोत्पादकभुजनिष्पत्तिश्च तुल्या तदा तानि क्षेत्राणि सजातीयानीति उच्यते ।

इति परिभाषाः ।

अथ प्रथमः साध्यः ।

तुल्यलम्बत्रिभुजयोः समानान्तरचतुर्भुजयोश्च या निष्पत्तिः सैव तदाधारयोरपि भवति ।



कल्प्येते अकग, चपघ समानलम्बत्रिभुजे ययोः कग, पघ आधारौ स्तः ।
अत्र △ अकग : △ चपघ = कग : पघ भविष्यति ।

अथ त्रिभुजे तथा स्थापिते येन कग, पघ रेखे ह्येकस्यामेव सरलरेखायां निपतेताम् । ततो अच रेखा याजनीया सा च कघ रेखायाः समानान्तरा भवेत् । त्रिभुजयोः समलम्बत्वात् ।

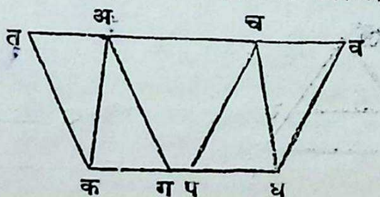
अथ यदि कग रेखायाः म समान् तथा पघ रेखायाः न समान् विभागांश्च कृत्वा प्रतिभागविन्दौ शीर्षस्थानात् रेखाश्च क्रियन्ते तदा प्रत्येकत्रिभुजस्य मिथस्तुल्यत्वात् अकग त्रिभुजस्य म समास्तथा चपघ त्रिभुजस्य न समा विभागा भवेयुः ।

∵ △अकग : △चपघ = म : न

एवमेव

कग : पघ = म : न

∴ △अकग : △चपघ = कग : पघ उपपन्नम् ।



तथा च यदि कग, पघ आधारयोरुपरि अतकग, चपघव समानलम्ब समानान्तरचतुर्भुजे वर्तेते तदा □ अतकग : □ चपघव = कग : पघ भविष्यति ।

अत्रापि त्रिभुजचतुर्भुजयोः समानान्तरेखयोरन्तर्वर्तित्वात्—

□ अतकग = २ △ अकग

एवं □ चपघव = २ △ चपघ

$\therefore$ $\frac{\text{□ अतकग}}{\text{□ चपघव}} = \frac{\triangle \text{ अकग}}{\triangle \text{ चपघ}}$

परन्तु $\frac{\triangle \text{ अकग}}{\triangle \text{ चपघ}} = \frac{\text{कग}}{\text{पघ}}$

$\therefore$ $\frac{\text{□ अतकग}}{\text{□ चपघव}} = \frac{\text{कग}}{\text{पघ}}$

वा, □ अतकग : □ चपघव = कग : पघ उपपन्नम् ।

अथवा प्रकारान्तरेणोपपत्तिः ।

यद्यत्र त्रिभुजयोर्लम्ब : ल कल्प्यते—

तदा △ अकग = $\frac{1}{2}$ कग · ल

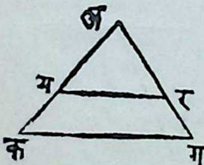
एवं △ चपघ = $\frac{1}{2}$ · पघ · ल

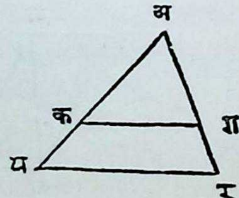
$\frac{\triangle \text{ अकग}}{\triangle \text{ चपघ}} = \frac{\text{कग}}{\text{पघ}}$

वा, △ अकग : △ चपघ = कग : पघ उपपन्नम् ।

द्वितीयः साध्यः ।

त्रिभुजे यद्याधारस्य समान्तरा रेखा विधीयते तदा तच्छिन्नभुजखण्डयोर्निष्पत्तिः समा स्यात् । यदि च तच्छिन्नभुजशकलयोर्निष्पत्तिः समा तदा सा रेखा भूमिसमानान्तरा भवेत् ।





अत्र कल्प्यते अकग त्रिभुजं यत्र यर रेखा कग भूमिसमानान्तराऽस्ति । तदा

अय : यक = अर : रग भविष्यति ।

अत्रोपपत्तिः । अथ कल्प्यते अक रेखा य बिन्दौ तथा खण्डिताऽस्ति यथा

अय : यक = न : म यत्र न, म अभिन्नसंख्ये स्तः । यद्यत्र अय रेखायां न समा विभागाः सन्ति तदा यक रेखायां म समा विभागा भवन्त्येव । परन्तु य बिन्दुतो यर रेखा कग समानान्तराऽतो अर रेखाया अपि न समास्तथा रग रेखाया म समा विभागा भवेयुः । प्रत्येकभागस्य समत्वात् ।

∴ अर : रग = न : म

परन्तु अय : यक = न : म

∵ अय : यक = अर : रग उपपन्नम् ।

अथवोपपत्तिः ।

अत्रापि कल्प्यते अकग त्रिभुजं यत्र यर रेखा कग भूमिसमानान्तराऽस्ति तदा—

अय : यक = अर : रग भविष्यति ।

अत्रोपपत्तिः । यग रेखा योजनेन यअर, यगर त्रिभुजे समानलम्बे जाते तेन—

△यअर : △यगर = अर : रग (अ ६ क्षे १)

एवमेव कर रेखाबन्धनेन रकय, रअय त्रिभुजे अपि समानलम्बे भवतस्तेनात्रापि

△ रअय : △ रकय = यक : यअ

परन्तु △ यगर = △ रकय तथाच रअय उभयनिष्ठस्तेन—

△ यअर : △ यगर = △ रअय : △ रकय

∴ अर : रग = यक : यअ उपपन्नम् ।

यदि च अर : रग = यक : यअ

तदा यर रेखा कग भूमि समानान्तरा भविष्यतीति ।

अत्रापि यगर, यअर त्रिभुजयोः समलम्बत्वात्

△ यअर : △ यगर = अर : रग

एवमेव △ रअय : △ रकय = अय : यक

परन्तु अर : रग = अय : यक

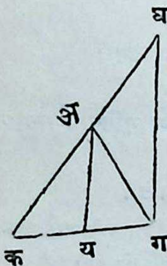
∴ △ यअर : △ यगर = △ रअय: △ रकय

∴ △ यगर = △ रकय

अतः यर रेखा कग समानान्तरा सम्पन्नेत्युपपन्नम् ।

तृतीयः साध्यः ।

त्रिभुजे शिरः कोणार्धकर्त्री रेखा ह्याधारे यत्र लगति तदुत्पन्न-भूखण्डयोर्निष्पत्तिर्भुजनिष्पत्त्या समा स्यात् । यदि च तदुत्पन्न-भूखण्डयोर्निष्पत्तिः समा तदा सा रेखा शिरः कोणमर्धयति ।



(१) (२)

अत्र कल्प्यते अकग त्रिभुजं यत्र अय रेखा कअग अन्तःकोणस्यार्धकारिणी (१) क्षेत्रे तथा बहिःकोणस्यार्धकारिणी द्वितीयक्षेत्रे चास्ति । तदा यक : यग = अक: अग भविष्यतीति ।

अत्रोपपत्तिः । ग स्थानात् अय समानान्तरा गघ रेखा विधेया । ततो गघ, अय समानान्तररेखयोरुपरि गअ रेखा निपतति ।

∴	< यअग	=	< अगघ	(१-२७)
एवं	< गघअ	=	< यअक	(१-२९)
परन्तु	< यअग	=	< यअक	समद्विभागकरणात्
∴	< अगघ	=	< गघअ	
∴	अग	=	अघ	

(२) क्षेत्रे तु

< यअग = < अगघ

एवमेव < गघअ = < यअकं

परन्त्वत्रापि < यअग = < यअकं

∴ < गघअ = < अगघ

∴ अग = अघ

अथ कगघ त्रिभुजे अय रेखा गघ भूमिसमानान्तरा तेन क्षेत्रद्वयेऽपि ।

अक : अघ = यक : यग (६-२)

परन्तु अघ = अग पूर्वसिद्धत्वात् ।

∴ अक : अग = यक : यग

यदि च अक : अग = यक : यग कल्प्येत तदा अय रेखा कअग कोणस्यान्तरर्धकारिणी बहिरर्धकारिणी च भविष्यतीति ।

अत्रोपपत्तिः । अत्रापि अय समानान्तरा गघ कार्या तेनात्रापि कघग त्रिभुजे अय रेखा गघ भूमि समानान्तराऽस्ति--

∴ अक : अघ = यक : यग

परं च अक : अग = यक : यग पूर्वकल्पनया

∴ अघ = अग

∴ < अघग = < अगघ

परन्तु अय, घग समानान्तररेखयोरुपरि अग रेखयाः पतनात्

< यअग = < अगघ

एवं < अघग = < यअक ।

∴ ∠ यअक = ∠ यअग

(२) क्षेत्रे तु

< अघग = < यअकं

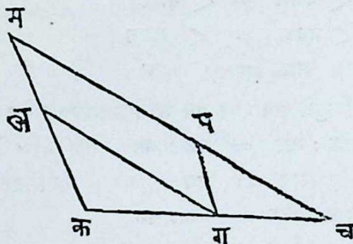
एवं < अगघ = < यअग

परं च < अगघ = < अघग

∴ < यअकं = < यअग उपपन्नं सर्वम् ।

चतुर्थः साध्यः ।

तुल्यकोणत्रिभुजयास्तुल्यकोणोत्पादकभुजौनष्पत्तिः समा स्यात् ।



यदि कल्प्येते अकग, पगच त्रिभुजे ययोः

∠ अकग = ∠ पगच, ∠ कअग = ∠ गपच तथा ∠ अगक = ∠ पचग तदा अक : पग = अग : पच = कग : गच भविष्यतीति ।

अत्र अकग, पगच त्रिभुजे तथा स्थापिते येन कग, गच रेखे एकस्यामेव सरलरेखायां भवेताम् । तथा कृते सति अकग, पचग कोणयोर्योगस्य समकोणद्वयतो न्यूनत्वात् चप रेखा वर्धनेन वर्धित कअ रेखायामवश्यमेव मिलिष्यति, स च बिन्दुः म कल्पितः ।

अत्रोपपत्तिः । अगक, पचग कोणौ तथा अकग, पगच कोणौ समानौ तेन अक, पग तथा अग, पच समानान्तरिते भवेताम् । अतः अगपम समानान्तरचतुर्भुजं जातम् ।

∴ पग = अम

एवं अग = मप

अथ कमच त्रिभुजे अग रेखा मच भूमि समानान्तरा तेन—

अक : अम = कग : गच

वा अक : पग = कग : गच

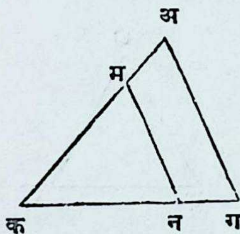
एवमेव पग रेखा कम समानान्तरा

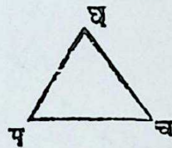
अतः कग : गच = मप : मच

वा, कग : गच = अग : पच

∴ अक : पग = अग : पच = कग : गच उपपन्नम् ।

अथवा





अत्रापि कल्प्येते अकग, घपच त्रिभुजे यत्र <क = <प, <अ = <घ तथा <ग = ∠च ।

तदा अक : घप = अग : चघ = कग : पच भविष्यति ।

अत्रोपपत्तिः । अकग त्रिभुजोपरि घपच त्रिभुजनिवेशेन प विन्दुः क विन्दौ मिलति, तथा कअ रेखायां घप रेखा पतति । यतः <क = <प, अतः पच रेखा कग रेखायां पतति । तेन कमन त्रिभुजं घपच त्रिभुजस्य सर्वतोभावेन समानं निष्पन्नम् ।

अथ पूर्वकल्पनया ∠ अ = ∠ घ

= ∠ कमन

∴ मन रेखा अग समानान्तरा जाता ।

∴ अम : कम = नग : कन

योगनिष्पत्या—

अक : कम = कग : कन

वा, अक : घप = कग : कन

एवमेव घपच त्रिभुजं अकग त्रिभुजोपरि तथास्थापितं येन च विन्दुः ग

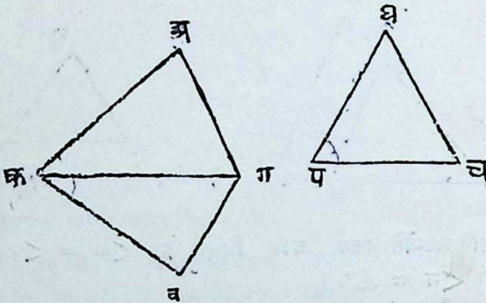
विन्दावेव मिलति । तथा कृतेसति—

कग : कन = अग : घच

∴ अक : घप = अग : घच = कग : कन उपपन्नम् ।

पञ्चमः साध्यः ।

यदि द्वयास्त्रिभुजयोर्भुजनिष्पत्तिः समा तदा ते द्वे समानकोणके भवेताम् ।



अत्र कल्प्येते अकग, घपच द्वे त्रिभुजे यत्र

अक : घप = अग : घच = कग : पच

तदा अकग, घपच समानकोणके भवेताम् ।

अथ क बिन्दोः कग रेखया घपच कोणसमानः गकव कोणस्तथा ग बिन्दोः घचप कोणतुल्यः कगव कोणश्च कृतः । अतः कवग कोणः पघच कोणेन समो भवति (१-१६x२)।

अथोपपत्तिः । कगव, घपच त्रिभुजयोस्तुल्यकोणकत्वात्तदुत्पादकभुजनिष्पत्तिः समा स्यात्तेन—

कव : घप = कग : पच

परञ्च अक : घप = कग : पच

∴ कव : घप = अक : घप

∴ कव = अक

एवमेव वग = अग भविष्यति ।

ततः कवग, अकग त्रिजभुयोः

कव = अक

वग = अग

कग उभयनिष्ठः

तेन अकग, कवग त्रिभुजे मिथस्तुल्ये (१-८)

∴ ∠गकव = ∠अकग, ∠कगव = ∠अगक तथा च

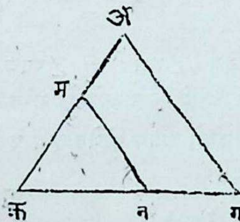
∠कवग = ∠कअग

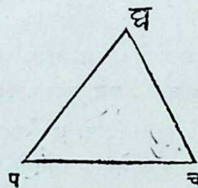
∴ ∠अ = ∠घ, ∠क = ∠प तथा

∠ग = ∠च उपपन्नं सर्वम् ।

(२०४३) षष्ठः साध्यः ।

त्रिभुजयोर्यद्येकैकः कोणस्तुल्यस्तथा तदुत्पादकभुजयोर्निष्पत्तिश्च समा, तदा ते द्वे त्रिभुजे सजातीये भवेताम् ।





कल्प्येते अकग, घपच त्रिभुजे यत्र

∠क = ∠प तथा अक : घप = कग : पच

तदा अकग, घपच त्रिभुजे सजातीयेऽर्थात्समानकोणके भवेताम् ।

अत्रोपपत्तिः । अकग त्रिभुजोपरि घपच त्रिभुजं तथा स्थाप्यते यथा प विन्दुः क विन्दौ तथा पघ रेखा कअ भुजोपरि परिपतेत् । परन्तु अकग कोणः घपच कोणेन समस्तेन पच रेखा कग रेखायां मिलति । अर्थात् घ, च विन्दू न, म विन्द्वोर्मिलेताम् । अत : कनम त्रिभुजं घपच त्रिभुजस्य रूपान्तरं जातम् ।

२

अथ पूर्वकल्पनया—

अक : घप = कग : पच

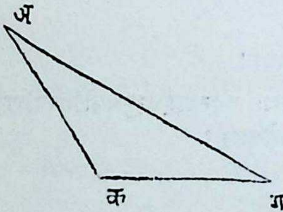
वा अक : कम = कग : कन

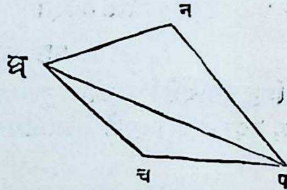
∴ नम रेखा अग समानान्तरा सिद्धा । (६–२)

∴ ∠कनम = ∠ग, ∠कमन = ∠अ

अतः अकग, घपच त्रिभुजे समानकोणके निष्पन्ने । उपपन्नम् ।

अन्यथोपपत्तिः ।





अत्रापि कल्प्येते अकग, घपच त्रिभुजे यत्र ∠कअग = ∠पघच तथा अग : घप = अक . घच, तदा अकग, घपच त्रिभुजे समानकोणके भवेताम् ।

अत्रोपपत्तिः । घ बिन्दौ घप रेखया पघन कोणो कअग कोणेन तथा प बिन्दौ घपन कोणो कगअ कोणेन च समानो निष्पाद्यः ।

∴ ∠अकग = ∠पनघ । (१–३२)

∴ अकग, घपन त्रिभुजे समानकोणके निष्पन्ने ।

∴ अग : घप = अक : घन

परं च अग : घप = अक : घच

∴ अक : घन = अक : घच

∴ घन = घच

अत्र घपच, घपन त्रिभुजयोः

घन = घच

घप उभयनिष्ठः ।

∠पघन = ∠पघच

∴ द्वे त्रिभुजे सर्वावयवेन समाने (१-४)

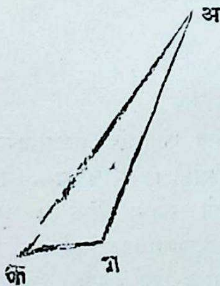
∴ ∠घपन = ∠घपच

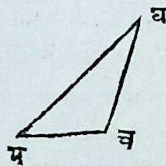
एवं ∠पनघ = ∠पचघ

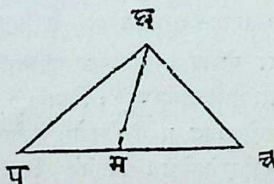
परं च पघन त्रिभुजं अकग, त्रिभुजेन समानकोणकं तेन अकग, घपच त्रिभुजे च मिथः समानकोणके जाते ।

सप्तमः साध्यः ।

द्वयोस्त्रिभुजयोरेकेकः कोणः समानो द्वितीयकोणोत्पादकभुजयोर्निष्पत्तिश्च तुल्या तृतीयकोण : समकोणान्न्यूनोऽन्यूनो वा स्यात्तदा त्रिभुजे मिथ : सजातीये भवेताम् ।







कल्प्यते अगक, घपच त्रिभुजयो : अकग कोण : घपच कोणेन समान : । अक : अग = घप : घच तथा अगक, घचप कोणौ प्रत्येकं समकोणान्न्यूनौ स्तस्तदा कअग, पघच कोणौ तथा अगक, घचप कोणौ च समानौ भवेताम् । त्रिभुजे च समानकोणके स्याताम् ।

अत्रोपपत्तिः । यद्यत्र कअग, पघच समानौ न स्तस्तदा तृतीयकोणयो : समकोणान्न्यूनत्वे कल्प्यते ∠कअग < ∠पघच, घ बिन्दौ ∠पघम = ∠कअग विधेयः ।

तदा अकग, पघम त्रिभुजे समानकोण के ।

अर्थात् ∠अकग = ∠घपम

∠कअग = ∠पघम

तथा ∠अगक = ∠घमप

∴ कअ : अग = पघ : घम

परं च कअ : अग = पघ : घच

∴ पघ : घम = पघ : घच

∴ घम = घच

∴ ∠घचम = ∠घमच

परं च घचम कोणस्य समकोणान्न्यूनत्वेन घमच कोणोऽपि समकोणान्न्यूनो जातः । अतो घमप कोण : समकोणतो महान् सिध्यति । परं च घमप कोणस्य अगक कोणसमत्वेन अगक कोणोऽपि समकोणतो महान् सिद्ध : । परमि वाधितम् । समकोणाल्पकल्पितस्य कोणस्य समकोणाधिकत्वसिद्धे : । अतो कअग, पघच कोणौ तथा अगक, घचप कोणौ समानावेव भवतः । तेन अकग, घपच त्रिभुजे च मिथः समानकोणके सम्पन्ने ।

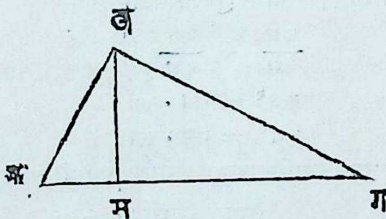
एवं अगक, घचप कोणयो : प्रत्येकस्य समकोणाधिकत्वेऽपि यथोक्त्या क्षेत्र-विन्यासेन अगक कोण : समकोणान्न्यून : सिध्यति । परमिदं वाधितम् । पूर्वं तदधिकत्वापत्ते : । अतो अगक, घचप कोणयो : प्रत्येकस्य समकोणान्न्यूनत्वेऽधि-कत्वे वा अकग, घपच त्रिभुजे मिथ : सजातीये भवत : ।

(अनु) त्रि जयोरेकैक : कोण : समान : , द्वितीयकोणोत्पादकभुजयोर्निष्पत्तिश्च तुल्या तदा तृतीयकोणौ समानौ वा तयोर्योग : समकोणद्वययोगसमो भवति । अत्रोभयस्थितौ त्रिभुजयोरपि सजातित्वं स्यात् ।

अत्रोपपत्तिस्तु प्रागुक्तवासनया स्पष्टमेव ।

अष्टमः साध्यः ।

जात्यत्रिभुजे शिरः कोणादाधारोपरि लम्बनिपातेन ये द्वे त्रिभुजे समुत्पद्येते ते मिथो वृहत्त्रिभुजेन सजातीये भवेताम् ।



कल्प्यते अकग जात्यत्रिभुजं यत्र कअग समकोणः । अ स्थानात् कग आधारोपरि अम लम्बः । अतो अकम, अगम त्रिभुजयोः प्रत्येकं अकग त्रिभुजेन सजातीयं भवेत् ।

अत्रोपपत्तिः । कअग, कअम त्रिभुजयोः

∠कअग = ∠कमअ समकोणत्वात्

∠क = उभयनिष्ठः ।

∴ ∠कगअ = ∠कअम (१–३२)

तेन कअम त्रिभुजं कअग त्रिभुजेन सजातीयम् ।

एवं गअक गअम त्रिभुजयोः

∠गअक = ∠गमअ समकोणत्वात्

∠ग = उभयनिष्ठः ।

∴ ∠गकअ = ∠गअम (१–३२)

अतः गअम त्रिभुजं गअक त्रिभुजेन च सजातीयं जातम् ।
तेन कअम, गअम त्रिभुजेऽपि मिथः सजातीये भवतः । उपपन्नम् ।

(अनुमाने) । कअम, मअग त्रिभुजयोः साजात्यतः—

$$\frac{\text{अम}}{\text{कम}} = \frac{\text{गम}}{\text{अम}}$$

$$\therefore \quad \text{अम}^2 = \text{कम} \cdot \text{गम}$$

अतः समकोणत्रिभुजे समकोणात्कर्णोपरि यो लम्बः स चाबाधयोर्मध्यसम्बन्धी भवति ।

तथा कअम, कअग त्रिभुजयोः सजातित्वेन—

$$\frac{\text{कअ}}{\text{कम}} = \frac{\text{कग}}{\text{कअ}}$$

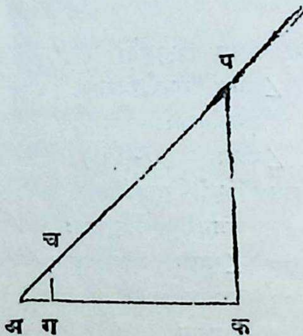
$$\therefore \quad \text{कअ}^2 = \text{कम} \cdot \text{कग}$$

$$\text{एवं} \quad \text{अग}^2 = \text{गम} \cdot \text{कग}$$

एतेन प्रत्येकभुजश्च स्वाश्रिताबाधाकर्णयोर्मध्यसम्बन्धी च स्यात् ।

नवमः साध्यः ।

निर्दिष्टरेखायास्तथैकं खण्डं विधेयं यन्निर्दिष्टरेखां निः शेषं भज्येत ।



अक रेखायास्तथैकं खण्डं विधेयं यत् अक रेखां निःशेषं भक्ष्यति ।

अ बिन्दोः कअप कोणविधायिनीं अप रेखां निर्माय तत्र कोऽपि च बिन्दुः खटिकयाऽङ्क्यः ।

अथ अक रेखाया यावन्ति खण्डान्यभीप्सितानि तद्गुणिताया अच रेखाया-स्तुल्यां अप रेखां विधाय पक रेखा योजनीया । पक समानान्तरा चग कार्या तेन अग निर्दिष्टखण्डं भवेत् ।

अत्रोपपत्तिः । अकप त्रिभुजे पक, चग रेखयोः समानान्तरत्वात्--

$$चप : अच = गक : अग$$

योगनिष्पत्त्या—

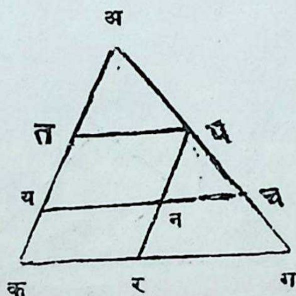
$$(चप + अच) : अच = (गक + अग) : अग$$

वा $$अप : अच = अक : अग$$

अत्र अच रेखा अप रेखां निरवशेषं करोतीति पूर्वकल्पनया स्पष्टमेवातो अक रेखामपि अग रेखा निःशेषं भजति । अतो अग रेखाऽभीष्टखण्डं सम्पन्नम् ।

दशमः साध्यः ।

एकस्या रेखाया यावन्ति खण्डानि सन्ति तत्सजातीयान्यपररेखायाः खण्डानि कर्तव्यानि ।



कल्प्येते अक, अग रेखे यत्र अग रेखायाः अप, पच, चग त्रयाणां खण्डानां सजातीयानि अक रेखायाः खण्डानि कर्तव्यानि सन्ति ।

अक, अग रेखाद्वयं अ बिन्दौ तथा निवेशितं यथा अ कोणं निर्माति । ततः कग रखां संयोज्य प, च बिन्दुभ्यां कग समानान्तरे पत, चय रेखे विधेये । तदा अत, तय, यक अभीष्टखण्डानि भवन्ति ।

अत्रोपपत्तिः । अक समानान्तरा पनर कार्या । परग त्रिभुजे चन ॥ गर

∴ रनः नप = गचः चप

परं च रनयक, नपतय समानान्तरचतुर्भुजे

∴ नर = कय, नप = तय

∴ कय : तय = गच : पच

एवं अयच त्रिभुजे पत ।। चय

∴ अतः तय = अपः पच

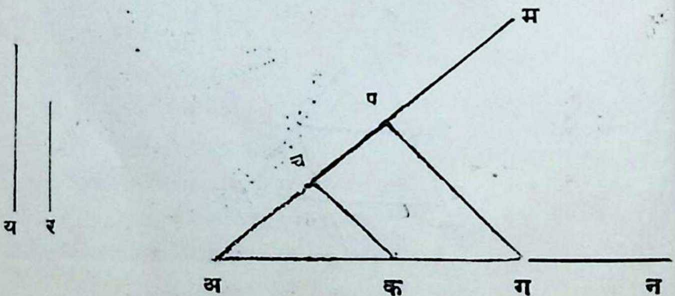
कयः तय = गचः पच पूर्वमेवसिद्धम् ।

∴ कयः अत = गचः अप

अत उपपन्नं यथोक्तम् ।

एकादशः साध्यः ।

द्वयोर्निर्दिष्टरेखयोस्तृतीयसम्बन्धिनी रेखाऽन्वेष्टव्या ।



कल्प्येते य, र रेखे ययोस्तृतीयसम्बन्धिनी रेखा कर्तव्या

अ कोणोत्पादिके केऽप्यनन्ते अम, अन रेखे कार्ये । तत्र अन रेखायां अक, कग क्रमेण य, र समे विधाय अच रेखा र समाना विधेया । कच संयोज्य कच समानान्तरा गप रेखा कार्या । तेन पच अभीष्टरेखा भवेत् ।

अत्रोपपत्तिः । अगप त्रिभुजे गप ॥ कच

∴ अकः कग = अच : चप

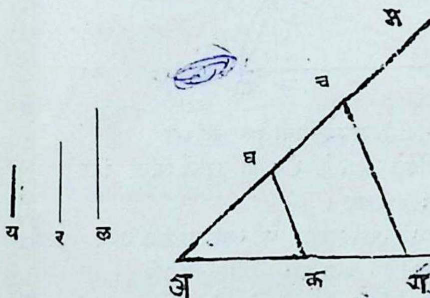
अत्र अक = य, कग = र = अच

∴ य : र = र : चप

अतः चप रेखा य, र रेखयोस्तृतीयसम्बन्धिनी स्यात् ।

द्वादशः साध्यः ।

तिसृणां रेखाणां चतुर्थसम्बन्धिनी रेखाऽन्वेषणीया ।



कल्प्यन्ते य, र, ल तिस्रो निर्दिष्टरेखा आसां चतुर्थसम्बन्धिनी रेखा गवेषणीया ।

अन, अम रेखे तथा विहिते यथा ताभ्यां अ कोणः समजनि । तथा सति अन रेखायां अक = य, कग = र विधाय अम रेखायां अघ = ल विधेया । कघ रेखा कार्या । ततः कघ समानान्तरा गच उत्पादनीया । तदा घच निर्दिष्ट-रेखा भवेत् ।

अत्रोपपत्तिः । अगच त्रिभुजे

चग ॥ कघ

∴ अक : कग = अघ : घच (६-२)

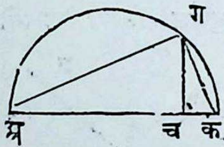
परं च अक = य, कग = र, अघ = ल

य : र = ल : घच

अतो घच रेखा य, र, ल रेखाणां चतुर्थसम्बन्धिनी सञ्जाता । उपपन्नं यथोक्तम् ।

त्रयोदशः साध्यः ।

द्वयोरभीष्टरेखयोर्मध्यसम्बन्धिनी रेखा गवेषणीया ।



कल्प्येते अच, कच रेखे ययोर्मध्यसम्बन्धिनी रेखा कर्तव्या ।

अच, कच रेखे तथा निवेशिते यथा ते ह्येकस्यां सरलरेखायां निपतेताम् । तथाकृते अच, कच रेखयोर्योगः = अक ।

अक रेखोपरि अगक वृत्तार्धचापं समुत्पा च स्थानात् चग लम्ब उत्पादनीयः । अग, कग रेखे च योजनीये । अतः चग अभीष्टरेखा भवेत् ।

अत्रोपपत्तिः । अगक= समकोणः । वृत्तार्धचापे वर्तमानत्वात् । अतो अगच, कचग त्रिभुजे मिथः सजातीये--

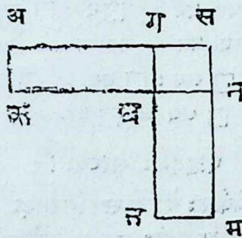
∴ अच : चग = चग : चक

अतो चग रेखा अच, चक रेखयोर्मध्यसम्बन्धिनी सिद्धा ।

यदि अक, अच रेखयोर्मध्यसम्बन्धिनी रेखाऽपेक्षिता तदा यथोक्तक्रियया अग रेखैव तयोर्मध्यसम्बन्धिनी भवतीति रेखागणितविदां विदुपामतिरोहितमेव, किमत्र लेखबहुलेन । उपपन्नं सर्वम् ।

चतुर्दशः साध्यः ।

तुल्यसमानान्तरचतुर्भुजयोर्यद्येकैकः कोणस्तुल्यस्तदा तुल्यकोणोत्पादकभुजयोर्मध्ये एकैकभुजयोर्निः पत्तिः समा स्यात् । यदि च सा समा तदा चतुर्भुजे अपि समे भवेताम् ।



घअ, घम समसमानान्तरचतुर्भुजे, यत्र ∠कघग = ∠नघत

तथा कघ : घन = तघ : गघ भविष्यति ।

घअ, घम चतुर्भुजे तथा निवेशिते यथा कघ, घन भुजौ तघ, घग भुजौ चैकस्यां सरलरेखायां भवेताम् , घगसन चतुर्भुजं पूरणीयम् ।

अत्रोपपत्तिः । कघ, घन रेखयोरेकस्यां सरलरेखायां वर्तमानत्वात्--

∠कघग + ∠नघग = २समकोण ।

घगसन समानान्तरचतुर्भुजं

तेन ∠नघग + ∠घगस = २समकोण ।

∴ ∠कघग = ∠सगघ

तेन अग, गस रेखे अप्येकस्मिन् मार्गे भवतः ।

अस, कन रेखे समानान्तरे

तेन □अघ: □ गन = घक: घन-

एवं गत, सम रेखयोः समानान्तरत्वात्

□ घम: □ घस = घत: घग -

परं च □ अघ = □ घम

∴ कघ: घन = घत: घग उपपन्नं यथोक्तं

यदि च कघः घन = घतः घग स्याद्

तदा □ अघ = □ घम भविष्यति ।

अत्रापि यथोक्त्या क्षेत्रविन्यासेन--

कघः घन = □ अघः □ घस

एवं घतः घग = □ घमः □ घस

परं च कघः घन = घतः घग

∴ □ अघ : □ घस = □ घम : □ घस

∴ □ अघ = □ घम उपपन्नं सर्वम् ।

पञ्चदशः साध्यः ।

तुल्यत्रिभुजयोर्यद्येकैकः कोणः समानस्तदा समानकोणोत्पादक-भुजयोर्मध्ये एकैकभुजयोर्निष्पत्तिःसमाना भवेत् । यदि च सा समा तदा त्रिभुज च समाने भवेताम् ।

अत्र गअक, गचप तुल्यत्रिभुजयोर्यदि अगक, पगच कोणौ समौ तदा अगः गप = कगः गच भविष्यति ।

गअक, गचप त्रिभुजे तथा निवेशिते यथा अग, गप रेखे तथा कग, गच रेखे चैकस्मिन्नेव मार्गे भवेताम् । अच, रेखा योजनीया ।

अत्रोपपत्तिः । अगक, अगच त्रिभुजयोः अ शीर्षस्थानादेकलम्बत्वात्—

Δअकग : Δअगच = कगः गच

एवं चअग, चपग त्रिभुजयोः च शीर्षबिन्दोरेक लम्बपतनात्—

$\triangle$चगप : $\triangle$चअग = गप : अग

परं च $\triangle$अकग = $\triangle$चगप

$\therefore$ कगः गच = गप : अग । उपपन्नम्

यदि च कगः गच = गप : अग स्यात्

तदा $\triangle$ अकग = $\triangle$ गचप भविष्यति ।

अत्रापि यथोक्त्या क्षेत्ररचनया—

कग : गच = $\triangle$अकग : $\triangle$अगच

एवं गप : अग = $\triangle$चगप : $\triangle$चअग

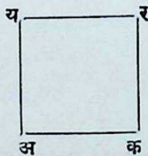
परं च कग : गच = गपः अग

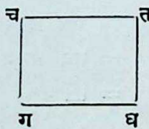
$\therefore$ $\triangle$अकग : $\triangle$अगच = $\triangle$चगप : $\triangle$चअग

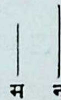
$\therefore$ $\triangle$अकग = $\triangle$चगप उपपन्नं सर्वम्

षोडशः साध्यः ।

अनुपातीयासु चतसृषु रेखासु यद्याद्यद्वितीययोः सम्बन्धस्तृतीयचतुर्थयोः सम्बन्धेन समः स्यात्तदाऽऽद्यान्त्यघातो मध्यघातसमः स्यात् । यदि च मध्यघातः प्रथमान्त्यघातेन समानस्तदा प्रथमद्वितीययोर्निष्पत्तिस्तृतीयचतुर्थयोर्निष्पत्त्या समा भवेत् ।







कल्प्यन्ते अक, गघ, म, न अनुपातीयाश्चतस्रो रेखिकाः, यत्र

अक : गघ = म : न

तदा अक $\times$ न = गघ $\times$ म भविष्यति ।

अक रेखोपरि अ बिन्दौ अय लम्बं विधाय अय = न कार्यः । ततो अयरक आयतक्षेत्रं पूरणीयम् ।

एवं गघ रेखोपरि ग बिन्दौ गच लम्बमुत्पाद्य गच = म विधाय गचतघ आयतं रचनीयम् ।

अत्रोपपत्तिः—

पूर्वकल्पनया अक : गघ = म : न

परं च म = गच, न = अय

∴ अक : गघ = गच : अय

अर्थात् कय, गत समानान्तरचतुर्भुजयोः समानकोणोत्पादकभुजयोर्मध्ये एकैकभुजयोर्निष्पतिः समा ।

तेन □ कय = □ गत (६-१४)

∴ अक × अय = गघ × गच

∴ अक × न = गघ × म सिद्धम् ।

यदि च अक × न = गघ × म

तदा अक : गघ = म : न भविष्यति ।

अत्रापि प्रागुक्तयुक्त्या क्षेत्रविन्यासेन—

अय = न, गच = म ।

यतः अक × न = गघ × म

∴ अक × अय = गघ × गच

∴ □ कय = □ गत

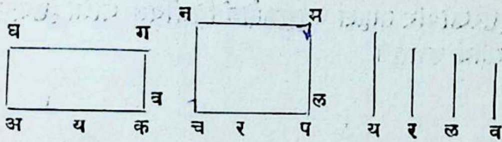
अत्रापि कय, गत समसमानान्तरचतुर्भुजयोः क, ग कोणौ समानौ । प्रत्येकं समकोणत्वात् ।

अतः अक : गघ = गच : अय ।

∴ अक : गघ = म : न उपपन्नं सर्वम् ।

सप्तदशः साध्यः ।

तिस्रो रेखा अनुपातीयाः । तत्र यदि प्रथमद्वितीययोः सम्बन्धो द्वितीयतृतीययोः सम्बन्धेन समः स्यात्तदा प्रथमान्त्यघातो द्वितीयवर्गसमानो भवेत् । यदि च तादृशवर्गः प्रथमान्त्यघातेन समस्तदा प्रथमद्वितीययोर्निष्पत्तिर्द्वितीयतृतीययोर्निष्पत्त्या समा स्यात् ।



य, र, व, तिस्रो रेखा अनुपातीया यत्र

य : र = र : व ।

तदा य × व = र^{२} भविष्यतीति ।

अत्रोपपत्तिः ।

र समानां ल रेखां निर्माय य, व रेखाभ्यां अकगघ तथा र, ल रेखाभ्यां च चपमन आयत क्षेत्रे रचनीये ।

यतः य : र = र : व

∴ य : र = ल : व । यत्र र = ल

अर्थात् अकगघ, चपमन आयतयोस्तुल्यकोणोत्पादकभुजयोर्मध्ये एकैकभुजनिष्पत्तिः समाना ।

तेन □ अग = □ चम (६–१६)

∴ अक × कग = चप × पम

∴ य × व = र × ल

∴ य × व = र^{२}

यदि च य × व = र^{२}

तदा य : र = र : व भविष्यति ।

अत्रापि यथोक्तविधानेन—

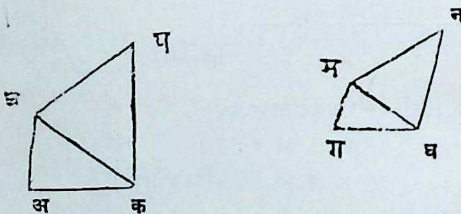
□ अग = □ चम

∴ अक : चप = कग : पम

∴ य : र = र : व उपपन्नं सर्वम् ।

अष्टादशः साध्यः ।

निर्दिष्टरेखोपरि तादृशं बहुभुजक्षेत्रं विधीयते यन्निर्दिष्टबहुभुजक्षेत्रेण सजातीयं स्यात् ।



अक निर्दिष्टरेखोपरि गघनम बहुभुजक्षेत्रसजातीयमेकं बहुभुजक्षेत्रं कर्तव्यम् ।

घम रेखा बन्धनीया ।

अक रेखाया अ विन्दौ कअच कोणः घगम कोणेन तथा क विन्दौ अकच कोणः गघम कोणेन च समानो विधेयः (१-२३) ।

∴ <अचक = <गमघ (१-३२)

अतः अकच, घगम त्रिभुजे समानकोणके सम्पन्ने ।

एवं कच रेखायाः च बिन्दौ कचप कोणः घमन कोणेन तथा क विन्दौ चकप कोणः मघन कोणेन च समः कार्यः (१-२२) ।

∴ <कपच = <घनम (१-३२)

अतः कचप, घमन त्रिभुजेऽपि समानकोणके सिद्धे ।

∴ अकपच चतुर्भुजं निर्दिष्टचतुर्भुजेन सजातीयं भविष्यति ।

अत्रोपपत्तिः। क्षेत्रविन्यासेन—

∠अ = ∠ग तथा च ∠प = ∠न

∠अचक = ∠गमव ………………………………(१)

∠अकच = ∠गवम ………………………………(२)

एवं ∠कचप = ∠घमन ………………………………(३)

∠चकप = ∠मघन ………………………………(४)

(१) (३) योस्तथा (२) (४) योश्च योगेन—

∠अचप = ∠गमन

तथा ∠अकप = ∠गवन

अतः अकपच, गघनम चतुर्भुजे समानकोणके संजाते।

अत्रापि समानकोणोत्पादकभुजनिष्पतिः समा भवतीति प्रदर्श्यते।

अकच, गघम त्रिभुजयोः समानकोणत्वात्—

अक : कच = गघ : घम।

एवं कपच, घमन त्रिभुजयोः समानकोणत्वात्

कच : कप = वम : घन

गुणनया—

अक : कप = गघ : घन

एवमनया दिशा—

अच : पच = गम : मन

तथा अक : अच = गघ : गम

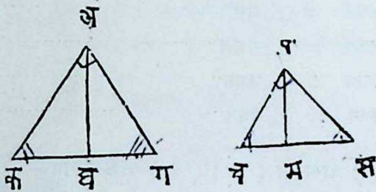
एवं कप : पच = घन : नम

अतो अकपच, गघनम क्षेत्रे सजातीये सम्पन्ने।

एवमनयैव क्रियया पंचादिबहुभुजक्षेत्रसजातीयं क्षेत्रं विरच्यत इति बुद्धिमता स्वयमेव वेदितव्यम्। किमत्र पिष्टपेषणेन।

एकोनविंशतितमः साध्यः ।

साजातित्रिभुजयोर्या निष्पत्तिः सैव तद्भुजवर्गयोरपि भवति ।



अकग, चपस त्रिभुजे सजातीये यत्र $\angle$अ = $\angle$प, $\angle$ग = $\angle$स, $\angle$क = $\angle$च तथा समानकोणोत्पादकभुजनिष्पतिश्च समा । अर्थात् अक : अग = पच : पस तदा Δअकग : Δचपस = कग^{२} : चस^{२} भविष्यति ।

अत्रोपपत्तिः—

$$\Delta \text{अकग} = \frac{\text{कग}\cdot\text{अघ}}{२}$$

$$\Delta \text{पचस} = \frac{\text{चस} \times \text{पम}}{२}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta \text{अकग}}{\Delta \text{पचस}} = \frac{\text{अघ}}{\text{पम}} \cdot \frac{\text{कग}}{\text{चस}} \quad \cdots\cdots (१)$$

अत्र अगघ, पमस त्रिभुजयोः

$\angle$ग = $\angle$स पूर्वकल्पनातः

$\angle$अघग = $\angle$पमस समकोणत्वात् ।

$\therefore$ $\angle$घअग = $\angle$मपस (१।३२)

तेन त्रिभुजे द्वे सजातीये ।

$\therefore$ अग : अघ = पस : पम

$\therefore$ अघ : पम = अग : पस

परञ्च अग : पस = कग : चस

∴ अघ : पम = कग: चस

वा, $\frac{\text{अघ}}{\text{पम}} = \frac{\text{कग}}{\text{चस}}$

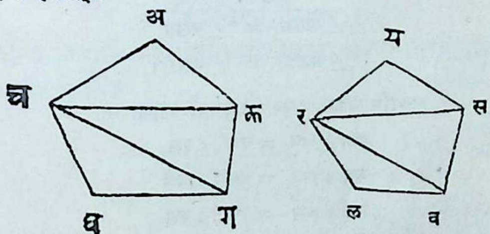
अनेन (१) समीकरणमुत्थाप्य जातम् ।

$$\frac{\triangle \text{अकग}}{\triangle \text{सपच}} = \frac{\text{कग}}{\text{चस}} \times \frac{\text{कग}}{\text{चस}}$$

$$= \frac{\text{कग}^2}{\text{चस}^2}$$ उपपन्नम् ।

विंशः साध्यः । सजातीयानि

साजातीयेषु बहुभुजक्षेत्रेषु तुल्यसङ्ख्यकानि त्रिभुजानि जायेरन् । बहुभुजानां त्रिभुजानां सजातीयबहुभुजवर्गाणां च समानः निष्पत्ति : स्यात् ।



कल्प्येते अकगघच, यरलवस साजातीये पञ्चभुजक्षेत्रे यत्र

चगघ : रलव = अकगघच : यरलवस

एवं अकगघच : यरलवस = घग^2 : लव^2 भविष्यति

अत्रोपपत्तिः । चक, चग, रेखे तथा रव, रस रेखे च योजनीये ।

बहुभुजक्षेत्रयो : सजातित्वात्—

∠घ = ∠ल

घग : वल = चघ : रल

∴ चघग, रवल त्रिभुजे मिथः सजातोये ।

∴ ∠घगच = ∠लवर

परं च ∠घगक = ∠लवस

∴ ∠चगक = ∠रवस

अत्र घग : कग = लव : वस बहुभुजयोः सजातित्वात्

परं च घग : गच = वल : रव

एकान्तरनिष्पत्त्या—

घग : वल = गच : रव

परं च घग : वल = कग : वस

∴ कग : वस = गच : रव

∴ कगच, रवस त्रिभुजे सजातीये।

∴ ∠कचग = ∠सरव

तथा ∠चकग = ∠रसव

अत्रापि सजातीय बहुभुजक्षेत्रत्वेन—

∠अकग = ∠यसव

∴ ∠अकच = ∠यसर।

अत्रापि चकग, रसव त्रिभुजयोः साजात्यतः—

कग : सव = चक : रस

परञ्च कग : सव = अक : यस

∴ यक : यस = चक : रस

अतएव अकच, यसर त्रिभुजेऽपि सजातीये सम्पन्ने।

अथ चगघ, रलव त्रिभुजयोः सजातित्वं प्रागेव प्रतिपादितम्।

तेन △चगघ : △रलव = चग^2 : रव^2

एवं चकग, रसव त्रिभुजयोः साजात्यतः—

△चकग : △रवस = चग^2 : रव^2

∴ △चगघ : △रलव = △चकग : △रवस।

एवमेव अकच, यरस त्रिभुजयोः साजात्यतः—

△अकच : △यरस = △गकच : △वसर

परञ्च △गचकः △वसर = △चगघः △रलव

$\therefore$ Δअकच : Δयरस = Δचगघः Δरलव ।

$\therefore$ Δअकच : Δयसर = Δकचग : Δरसव = Δचगघ : Δरलव

$$\therefore \frac{\Delta\text{अकच} + \Delta\text{चकग} + \Delta\text{चगघ}}{\Delta\text{यसर} + \Delta\text{रसव} + \Delta\text{रलव}} = \frac{\Delta\text{चगघ}}{\Delta\text{रलव}}$$

$$\text{वा} \quad \frac{\text{अकगघच बहुक्षे}}{\text{यरलवस बहुक्षे}} = \frac{\Delta\text{चगघ}}{\Delta\text{रलव}}.$$

अत्रैवैकोनविंशीप्रतिज्ञया—

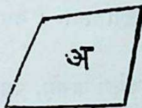
$$\frac{\Delta\text{ चगघ}}{\Delta\text{ रलव}} = \frac{\text{घग}^2}{\text{लव}^2}$$

$\therefore$ अकगघच बहुक्षेः यरलवसबहुक्षे = गघ^2 : लव^2 उपपन्नं सर्वम् ।

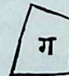
अनु० । तिस्रो रेखा यद्यनुपातीयास्तदा प्रथमद्वितीयरेखास्थितयोः सजातीयक्षेत्रयोर्यः सम्बन्धःस एव प्रथमतृतीयरेखयोरपि स्यात् ।

एकविंशतितमः साध्यः ।

यावन्ति क्षेत्राणि कस्याप्येकस्य क्षेत्रस्य सजातीयानि तानि मिथः सजातीयानि भवन्ति ।







अ, ग क्षेत्रयोः प्रत्येकं क क्षेत्रेण सजातीयं तदा . अ, ग क्षेत्रेऽपि मिथः सजातीये भवेताम् ।

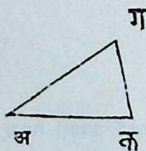
अत्रोपपत्तिः । अ, क क्षेत्रयोः साजात्यतः ते मिथः समानकोणके भवेताम् । तथा समानकोणोत्पादकभुजयोः समानः सम्बन्धः ।

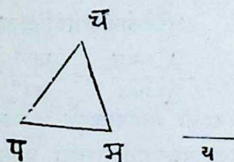
एवं ग, क क्षेत्रयोः सजातित्वात् ते परस्परं समानकोणके स्तः । समानकोणोत्पादकभुजयोर्निष्पत्तिश्च समानैव ।

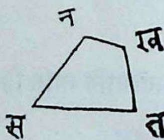
अतो अ, ग क्षेत्रेऽपि समानकोणके सम्पन्ने । तथा समानकोणोत्पादकभुजनिष्पतिश्च तुल्येति सिद्धम् । अतो अ, ग क्षेत्रे सजातीये भवतः ।

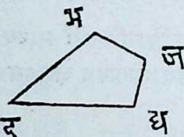
द्वाविंशः साध्यः ।

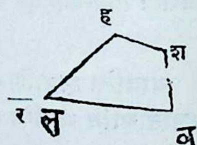
यदि चतस्रो रेखाः समनिष्पत्तिकास्तदा प्रथमद्वितीयरेखास्थयोः सरलक्षेत्रयोर्यः सम्बन्धः स एव तृतीयचतुर्थस्थयोरपि भवति । यदि वा तादृशः सम्बन्धः समानस्तदा चतस्रो रेखाः समनिष्पत्तिकाः ।











कल्प्यन्ते अक, पम, सत, दध चतस्रो रेखा अनुपातीयाः । यत्र

अक : पम = सत : दध

तथा च अक, पम, सत, दध रेखाणामुपरि क्रमेण अकग, पमच, सतखन, दधजभ सजातीयानि ऋजुभुजक्षेत्राणि निर्मितानि सन्ति तदा

अकगक्षे : पमचक्षे = सतखनक्षे : दधजभक्षे भविष्यति ।

अत्रोपपत्तिः । कल्प्यते अक, पम रेखयोः तथा सत, दध रेखयोश्च तृतीयसम्बन्धिनी रेखा क्रमेण य, र । तदा

अक : पम = पम : य

एवं सत : दध = दध : र

परंच अक : पम = सत : दध

∴ पम : य = दध : र

∴ अक : य = सत : र

परञ्च अक : य = अकगक्षे : पमचक्षे (अनु० २०)

एवं सत : र = सतखनक्षे : दधजभक्षे

∴ अकगक्षे : पमचक्षे = सतखनक्षे : दधजभक्षे ।

उपपन्नः प्रथमः प्रकारः ।

अथान्यथा वोपपत्तिः ।

अक : पम = सत : दध

∴ $अक^2 : पम^2 = सत^2 : दध^2$

परञ्च $अक^2 : पम^2$ = अकगक्षे : पमचक्षे (६-२०)

एवं $सत^2 : दध^2$ = सतखनक्षे : दधजभक्षे ।

अकगक्षे : पमचक्षे = सतखनक्षे : दधजभक्षे उपपन्नम् ।

यदि च अकगक्षे : पमचक्षे = सतखनक्षे : दधजभक्षे

तदा अक : पम = सत : दध भविष्यति ।

अत्रापि कल्प्यते अक, पम, सत तिसृणां रेखाणां चतुर्थसम्बन्धिनी लव रेखा यस्या उपरि लवशह क्षेत्रं दज, खस क्षेत्रयोः कतरस्य सजातीयं विहितं भवेत् । (६—१८)

∴ अक : पम = सत : लव ।

अत्र पूर्वोक्तोपपत्त्या—

अकगक्षे : पमचक्षे = दजक्षे : शलक्षे

परञ्च अकगक्षे : पमचक्षे = दजक्षे : खसक्षे

∴ दजक्षे : शलक्षे = दजक्षे : खसक्षे

∴ शलक्षे = खसक्षे

∴ वल = दध

पूर्वकल्पनया—

अक : पम = सत : लव

∴ अक : पम = सत : दध उपपन्नम् ।

अथ वा

अकगक्षे : पमचक्षे = दजक्षे : खसक्षे कल्पितमेव ।

परं च अकगक्षे: पमक्षे = अक^{२} : पम^{२}

एवं दजक्षे: खनक्षे = सत^{२} : दध^{२}

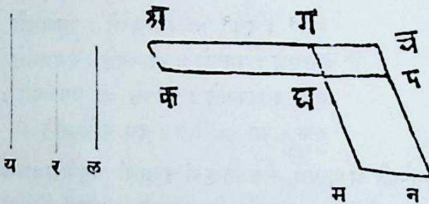
∴ अक^{२} : पम^{२} = सत^{२} : दध^{२}

∴ अक : पम = सत : दध

अतः अक, पम, सत, दध रेखा अनुपातीयाः सिद्धाः । उपपन्नं सर्वम् ।

त्रयोविंशतितमः साध्यः ॥

सजातीयसमानान्तरचतुर्भुजयोस्तद्भुजघातयोश्चैका निष्पत्तिः स्यात् ।



घअ, घन सजातीयसमानान्तरचतुर्भुजे यत्र ∠कघग = ∠मघप ।

तदा □ अघ : घन □ = कघ · घप : घम · घग भविष्यति ।

अत्र घअ, घन चतुर्भुजे तथा निवेशिते यथा कघ, घप रेखे तथा गघ, घम खेरे च सरलैकमार्गे भवेताम् । तथा कृते घगचप समानान्तरचतुर्भुजं पूरणीयम् ।

अत्रोपपत्तिः । कल्प्यते काऽपि रेखा य । कघ, घप, य रेखाणां चतुर्थसम्बन्धिनी रेखा र ।

एवं घम, घग, र तिसृणां रेखाणां चतुर्थसम्बन्धिनी रेखा ल ।

तदा घक : घप = य : र

एवं घम : घग = र : ल ।

$$\therefore \quad \frac{\text{घक}}{\text{घप}} \times \frac{\text{घम}}{\text{घग}} = \frac{\text{य}}{\text{ल}}$$

वा, घक · घम : घप · घग = य · ल ।

परं च □ घअ : □ घच = घक : घप

एवं □ घन : □ घच = घम : घग ।

पक्षयोर्भजनेन—

$$\square \text{घअ} : \square \text{घन} = \text{घक} : \text{घप} :: \text{घम} : \text{घग}$$
$$= \text{य} : \text{र} :: \text{र} : \text{ल}$$
$$= \text{य} : \text{ल}$$

$\therefore$ $\square$ घअ : $\square$ घन = घक · घप : घम · घग उपपन्नम् ।

अथ वोपपत्तिः ।

अघ, घन चतुर्भुजयो : सजातित्वात्—

$$\square \text{अघ} : \square \text{घन} = \text{घक}^{२} : \text{घम}^{२} \qquad (६\text{–}२०)$$

परं च साजातिक्षेत्रे तुल्यकोणोत्पादकभुजयोः निष्पत्तिः समा स्यात्तेन—

$$\text{घक} : \text{घप} = \text{घम} : \text{घग}$$

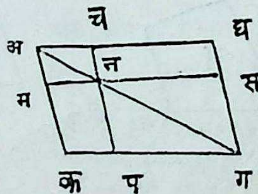
अतः समगुणनभजनाभ्याम्—

$$\frac{\square \text{अघ}}{\square \text{घन}} = \frac{\text{कघ}^{२}}{\text{घम}^{२}} \div \frac{\text{कघ}}{\text{घप}} \times \frac{\text{घम}}{\text{घग}}$$
$$= \frac{\text{कघ}^{२}}{\text{घम}^{२}} \times \frac{\text{घप}}{\text{घग}} \times \frac{\text{घम}}{\text{घक}}$$
$$= \frac{\text{घक} \cdot \text{घप}}{\text{घम} \cdot \text{घग}}$$

$\therefore$ $\square$ अघ : $\square$ घन = घक · पघ : घग · घम उपपन्नं सव सुगमेन ।

चतुर्विंशतितमः साध्यः ।

कर्णाश्रितसमानान्तरचतुर्भुजे मिथः समानान्तरचतुर्भुजेन सजातीये भवेताम् ।



अघगक समानान्तरचतुर्भुजं चम, सप मिथः साजातिभ्यां कर्णाश्रितसमानान्तरचतुर्भुजाभ्यां सजातीयं भवेत् ।

अत्रोपपत्तिः । घग, चप रेखे तथा कग, मस रेखे च समानान्तरे ।

अतः ∠अघग = ∠अचन ।

तथा ∠गकअ = ∠समअ ।

अथ कगघ, चनम कोणयोः प्रत्येकं मअच संमुखकोणेन समं तेन—

∠कगघ = ∠मअच ।

अत्र अघग, अचन त्रिभुजयोः

∠अघग = ∠अचन

∠ घअग = उभयनिष्ठः

∴ ∠ अनच = ∠ अगघ ।

तेन त्रिभुजे समानकोणके जाते । तत्र समानकोणोत्पादकभुजनिष्पत्तेः समत्वात्

घग : घअ = चन : चअ

वा, कअ : अघ = अम : अच

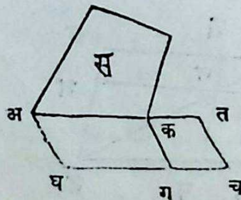
वा, अक : कग = अम : मन

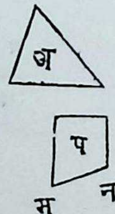
अतः चम समानान्तरचतुर्भुजं अकगघ समानान्तरचतुर्भुजेन सजातीयं सिद्धम् ।

अनयैव दिशा गन समानान्तरचतुर्भुजमपि अकगघ समानान्तरचतुर्भुजेन सजातीयं सिद्ध्यति । उपपन्नम् ।

पञ्चविंशतितमः साध्यः ।

एकं तादृशं ऋजुभुजक्षेत्रं चिकीर्षितं यन्निर्दिष्टऋजुभुजक्षेत्रेण सजातीयं तथाऽन्येन च समानं भवेत् ।





अत्रैकं तादृशं सरलक्षेत्रं रचनीयं यत् अ सरलक्षेत्रेण समानं तथा स क्षेत्रेण च सजातीयं भवेत् ।

अक भुजोपरि अकगघ समानान्तरचतुर्भुजं स क्षेत्रसमं विधेयम् । तथा च कग रेखो परि अ क्षेत्रसमानं कगचत समानान्तरचतुर्भुजं कार्यं यस्य गकत कोणो कअघ कोणेन तुल्यो भवेत् । एवं कृते सति अक, कत रेखे तथा घग, गच रेखे च सरलमार्गे भवतः ।

अथ कल्प्यते अक, कत रेखयोर्मध्यसम्बन्धिनी रेखा मन । मन रेखोपरि प ऋजुभुजक्षेत्रं कार्यं यत् खलु स क्षेत्रेण सजातीयं भवेत् । (६-१८)

तदा प अभीप्सितं क्षेत्रं भविष्यति ।

अत्रोपपत्तिः—अक, कत रेखयोः मन रेखा मध्यसम्बन्धिनी । तेन

$$\text{अक} : \text{मन} = \text{मन} : \text{कत}$$

परञ्च स, प क्षेत्रयोः सजातित्वात्—

$$\frac{\text{सक्षे}}{\text{पक्षे}} = \frac{\text{अक}^2}{\text{मन}^2} = \frac{\text{अक}^2}{\text{कत} \cdot \text{अक}} = \frac{\text{अक}}{\text{कत}}$$

परञ्च $\text{अक} : \text{कत} = \square\ \text{अग} : \square\ \text{कच}$

$\therefore$ $\text{स} : \text{प} = \square\ \text{अग} : \square\ \text{कच}$

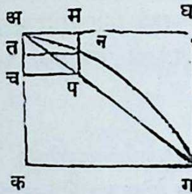
परञ्च $\text{सक्षे} = \square\ \text{अग}$

$\therefore$ $\text{पक्षे} = \square\ \text{कच}$

$= \text{अक्षे}$ उपपन्नम् ।

षडविंशतितमः साध्यः ।

यदि सजातीयसमानान्तरचतुर्भुजयोरेकः कोण उभयनिष्ठस्तदा ते द्वे एककर्णाश्रिते भवेताम् ।



कल्प्येते अकगघ, अचपम सजातीयसमानान्तरचतुर्भुजे यत्र कअघ कोण उभयनिष्ठस्तदा ते एककर्णाश्रिते भवेताम् ।

अत्रोपपत्तिः । अग कर्णो योजनीयः । यद्यत्र अग रेखा प बिन्दौ न गच्छति तदा पम भुजं न बिन्दौ छिनत्तीति कल्पितम् । ततो नत रेखा पच वा अम समानान्तरा कृता ।

तेन अमनत समानान्तरचतुर्भुजं अकगघ चतुर्भुजेन सजातीयं स्याद् । (६-२४)

∴ अमः अत = अघः अक

परञ्च पूर्वकल्पनया—

अघः अक = अमः अच

∴ अमः अत = अमः अच

∴ अत = अच

इदं महद्बाधितम् । सम्पूर्णरेखायाः स्वखण्डेन तुल्यत्वापत्तेः । अतः पूर्वकल्पना समीचीनैव ।

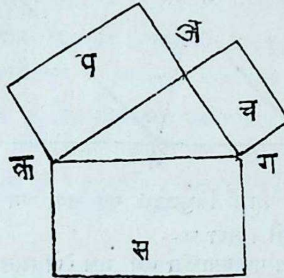
सप्तविंशतितमः साध्यः ।

एकस्या रेखायास्तथा खण्डं विधीयते यदेकखण्डनिर्दिष्टरेखयोरपरखण्डं मध्यसम्बन्धि भवेत् ।

अस्योपपत्तिस्तु क्षेत्रमितेर्द्वितीयाध्यायस्यैकादशीप्रतिज्ञया सरलेव ।

अष्टाविंशतितमः साध्यः ।

जात्यत्रिकोणे भुजकोट्योरुपरि निर्मितयोः सजातीयऋजुभुजक्षेत्रयोर्योगः कर्णगतसजातीयऋजुभुजक्षेत्रेण समानो भवेत् ।



कल्प्यते अकग समकोणत्रिभुजम् । यत्र अग, कग, अक क्रमेण कोटि कर्णभुजाः । कर्णभुजकोटीनामुपरि क्रमेण स, प, च सजातीयानि क्षेत्राणि विहितानि सन्ति ।

तदा पक्षे + चक्षे = सक्षे भविष्यति ।

अत्रोपपत्तिः । प, च क्षेत्रे सजातीये

∴ पक्षे : चक्षे = अक^2 : अग^2

योगनिष्पत्त्या—

$$\frac{\text{पक्षे} + \text{चक्षे}}{\text{चक्षे}} = \frac{\text{अक}^2 + \text{अग}^2}{\text{अग}^2}$$

परञ्च अक^2 + अग^2 = कग^2

$$\therefore \frac{\text{पक्षे} + \text{चक्षे}}{\text{चक्षे}} = \frac{\text{कग}^2}{\text{अग}^2}$$

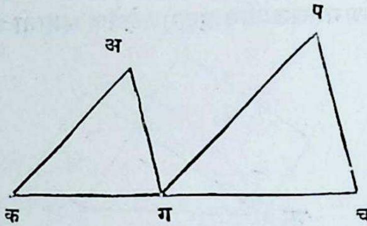
$$= \frac{\text{सक्षे}}{\text{चक्षे}}$$

∴ पक्षे + चक्षे = सक्षे उपपन्नम् ।

एकोनत्रिंशत्तमः साध्यः ।

यदि त्रिभुजयोर्मध्ये प्रथमस्य भुजद्वयं क्रमेण द्वितीयस्य भुजद्वयेन

समानान्तरितं तथा समानान्तरभुजयोर्निष्पत्तिश्च तुल्या स्यात्तदा तृतीयभुजावेकस्मिन्नेव सरलमार्गे भवेताम् ।



कल्प्यते अकग, पगच त्रिभुजद्वयं यत्र अक, अग भुजौ क्रमेण पग, पच भुजाभ्यां तुल्यान्तरितौ । तथा च—

अकः अग = पगः पच स्यात्तदा कग, गच रेखे सरल मार्गे भवेताम् ।

अत्रोपपत्तिः । अक, पग रेखयो स्तथा अग, पच रेखयोश्च समानान्तरत्वात्—

∠ कअग = ∠ गपच

परञ्च पूर्वकल्पनया—

अकः अग = पगः पच

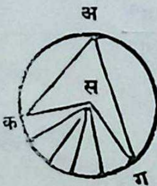
अतः अकग, पगच त्रिभुजे सजातीये भवतस्तेन—

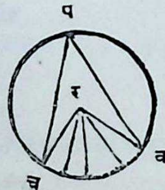
∠ अकग = ∠ पगच

अतः कग, गच रेखे एकस्मिन्नेव मार्गे भवतः । उपपन्नं यथोक्तम् ।

त्रिंशत्तमः साध्यः ।

तुल्यवृत्तयोः केन्द्रगकोणयोः परिधिलग्नकोणयोस्तन्निष्ठचापयोस्तच्चापक्षेत्रयोश्च समानैव निष्पत्तिः स्यात् ।





कल्प्येते अकग, पचव तुल्यवृत्ते यत्र कसग, चरव केन्द्रलग्नकोणौ तथा

कअग, चपव परिधिलग्नकोणौ स्तः । तदा—

(१) ∠कसग : ∠चरव = चापकग : चापचव ।

(२) ∠कअग : ∠चवप = चापकग : चापचव ।

(३) चा △ कसग : चा △ चरव = चापकग : चापचव भविष्यति ।

अत्रोपपत्तिः । कल्प्यते चाप कग : चापचप = म : न, अत्र यदि कग चापे म समाना विभागा : क्रियन्ते तदा चव चापस्य न समा विभागा भविष्यन्ति ।

अथ स वृत्तकेन्द्रात् म विभागात्मकस्य कग चापस्य प्रतिभागबिन्दौ बद्धाभी रेखाभिर्जायमानाः सर्वे कोणाः समाना एव, तुल्यचापे वर्तमानत्वात् । एवमेव न विभागात्मकस्य चव चापस्यापि र केन्द्रात् प्रतिभागविन्दुगतरेखाभिः कोणास्तुल्या भविष्यन्ति ।

∴ ∠कसग : ∠चरव = चाप कग : चाप चप उपपन्नम् ।

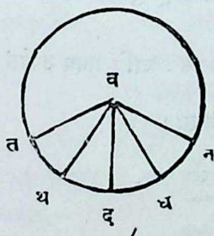
परं च ∠ कसग = २ ∠ कअग
एवं ∠ चरव = २ ∠ चपव } ३.२०

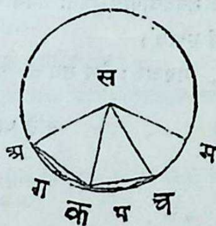
∴ ∠ कसग : ∠ चरव = ∠ कअग : ∠ चपव

∵ ∠ कसग : ∠ चरव = चाप कगः चाप चव

∴ ∠ कअग : ∠ चपव = चाप कगः चाप चव

एतेन द्वितीयः प्रकार उपपद्यते ।





अक, कच रेखे संयोज्य अक, कच चापयोः कुत्रापि ग, प बिन्दू प्रकल्प्य अग, गक, कप, पच रेखाः कार्याः ।

अथ असक, कसच त्रिभुजयोः

अस = सक

सक = सच

∠ असक = ∠ कसच

∴ अक = कच

∴ △सअक = △सकच

∴ चाप अक = चाप कच

∴ शेषचाप अमक = शेषचाप कमच

∴ ∠ अगक = ∠ कपच

∴ अगक, कपच त्रिभुजे सजातीये

परं च अक = कच

∴ △ अगक = △ कपच

पूर्वं तु △ असग = △ सकच

∴ असग चापत्रि = कसच चाप त्रिभुज

एवमेव असक, कसच, चसम चापत्रिभुजानि तुल्यानि भवन्ति ।

अनयैव दिशा तवथ, थवद, दवध, धवन चापत्रिभुजानि तुल्यानि भविष्यन्ति ।

अतोऽत्रापि असक चापत्रिभुजतो असमचाप त्रिभुजं तावद्गुणो भवति अक चापतो अम चापं यावान् स्यात् ।

एवं तवथचापत्रिभुजतः तवन चापत्रिभुजं यावान् गुणस्तावानेव तथ चापतो तन चापं स्यात् ।

∴ चाप अक : चाप तथ = चापत्रिभुज असक : चात्रि तवथ उपपन्नं सर्वम् ।

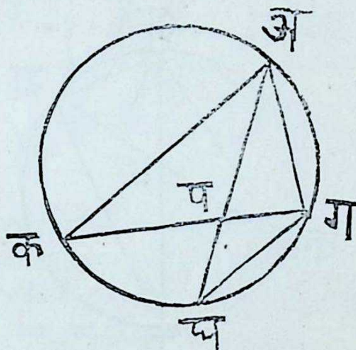
इति षष्ठाध्यायः समाप्तः ।



अथ छात्राणां बुद्धिवैशद्यार्थं कतिचन प्रश्नाः सोत्तराः प्रदर्श्यन्ते ।

प्रथमः प्रश्नः ।

त्रिभुजे शिरः कोणार्धकारिणी रेखा आधारे यत्र लगति तदुत्पादकाधारखण्डयोर्घातः कोणार्धकारिरेखावर्गयुक्तो भुजद्वयघातसमो भवति ।



कल्प्यते अकग त्रिभुजं, अप शिरः कोणार्धकारिणी रेखा तदा

अक · अग = कप · पग + अप^2 भविष्यति ।

अत्रोपपत्तिः । अकप, अगघ त्रिभुजयोः ।

∠ कअप = ∠ गअघ कोणार्धत्वात् ।

∠ अकग = ∠ अघग अग चापोपरिवर्तमानत्वात् ।

∴ ∠ अपक = ∠ अगघ । (१.३२)

अतः त्रिभुजे द्वे समानकोणके सिद्धे । तत्र समानकोणोत्पादकभुजयोर्निष्पत्तिसाम्यत्वात्—

अक : अप = अघ : अग

∴ अक · अग = अप · अघ

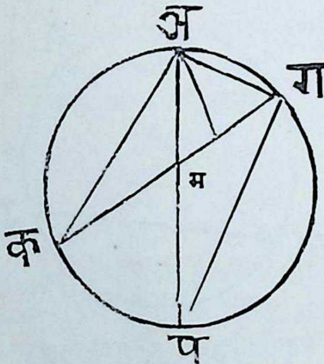
= अप^2 + अप · पघ

परं च कग, अम पूर्णज्ये प बिन्दौ मिलतः ।

∴ अक × अग = अप² + कप × पग उपपन्नम् ।

द्वितीयः प्रश्नः ।

त्रिभुजे शिरः कोणादाधारोपरि यो लम्बस्तस्य त्रिभुजोपरिग-वृत्तव्यासस्य च घातः भुजद्वयघातेन समः स्यात् ।



अकग त्रिभुजम् । अम आधारो परि लम्बः । अप त्रिभुजोपरि अकपग वृत्तस्य व्यासः ।

अत्र अक × अग = अप · अम भविष्यति ।

पग रेखा कार्या ।

अत्रोपपत्तिः । अपग त्रिभुजे ग कोणस्य अप वृत्तार्धचापे वर्तमानत्वात् ∠ग = समकोणः ।

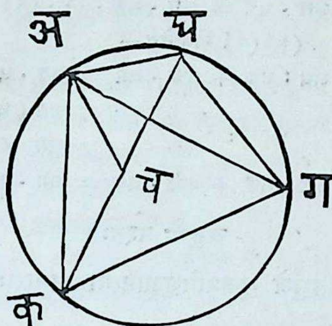
अतः अकम, अपग त्रिभुजे सजातीये भवतस्तेन—

अक : अम = अप : अग

अक × अग = अप × अम उपपन्नं सर्वम् ।

तृतीयः प्रश्नः।

वृत्तान्तस्थचतुर्भुजे कर्णघातः सम्मुखभुजघातयोगेन समः स्यात्।



अकगघ वृत्तान्तस्थचतुर्भुजं यत्र अग, कघ कर्णौ स्तः।

अत्र कग · अघ + अक · घग = अग · कघ भविष्यति।

अत्रोपपत्तिः। अ बिन्दौ कअ रेखया कअच कोणो गअघ कोणेन समो निष्काशनीयः। तदा अकच, अगघ त्रिभुजयोः—

∠ कअच = ∠ गअघ

∠ अकच = ∠ अगघ अघ चापोपरि वर्तमानत्वात्।

∴ ∠ अचक = ∠ अघग

अतस्त्रिभुजे समानकोणके जाते।

∴ अक : कच = अग : गघ

∴ अक × गघ = अग × कच · · · · (१)

अथ ∠ कअच = ∠ गअघ

∴ ∠ कअच + ∠ गअच = ∠ गअघ + ∠ गअच

वा, ∠ कअग = ∠ चअघ

∠ अघक = ∠ अगक अक चापोपरि गतत्वात् ∴

∠ अचघ = ∠ अकग (१ · ३२)

∴ अघच, अकग त्रिभुजे समानकोणके

∴ अग : गक = अघ : घच

∴ अग · घच = अघ · गक . . . . (२)

(१) (२) योर्योगेन—

∴ अघ · गक + अक · घग = अग · घच + अग · कच

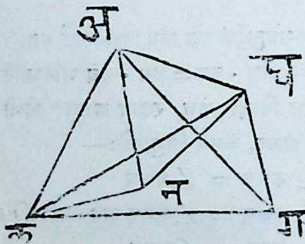
= अग (घच + कच)

= अग × कघ

∴ अघ · गक + अक · घग = अग · कघ उपपन्नं यथोक्तम् ।

चतुर्थः प्रश्नः ।

अवृत्तान्तश्चतुर्भुजे भुजप्रतिभुजाहत्याः समासः कर्णघातादधिको भवति ।



अकगघ अवृत्तान्तश्चतुर्भुजम् । अक, कग, गघ, घअ भुजास्तथा अग, कघ कर्णौ च ।

तदा अक · गघ + अघ · कग > अग · कघ भविष्यति ।

अत्रोपपत्तिः । कअ रेखायाः अ बिन्दौ कअन कोणो गअघ कोणेन तथा क बिन्दौ अकन कोणः अगघ कोणेन च समानो विधेयः । तथा कृते सति अकन, अगघ त्रिभुजे समानकोणके स्याताम् ।

∴ अक : कन = अग : गघ

∴ अक · गघ = अग · कन . . . . (१)

तथा च अक : अन = अग : अघ

वा अक : अग = अन : अघ

अथात्र अकग, अघन त्रिभुजयोः—

∠कअग = ∠घअन

अक : अग = अन : अघ

∴ अकग, अघन त्रिभुजे साजात्ये ।

∴ कग : अग = घन : अघ

वा कग · अघ = अग · घन · · · · (२)

(१) (२) समीकरणयोर्योगेन—

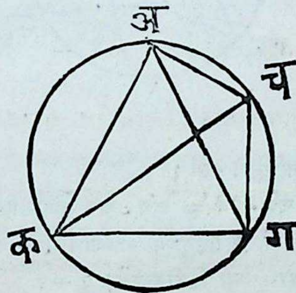
कग · अघ + अक · गघ = अग (घन + कन)

परं च घन + कन > कघ

∴ कग · अघ + अक · गघ > अग · कघ उपपन्नं यथोक्तम् ।

पञ्चमः प्रश्नः ।

समत्रिभुजोपरिगतवृत्तपरिधिस्थात्कस्माच्चनबिन्दोः समत्रिभुज कोणावधि या रेखा नीयन्ते तत्र पार्श्वगतरेखाद्वययोगस्तृतीयरेखा-समो भवति ।



अकग समत्रिभुजम् । यत्र अक, कग, गअ भुजाः समाः । अकगच त्रिभुजोपरिगतवृत्तपरिधिस्थात् च बिन्दोः चअ, चक, चग रेखा योजनीयाः ।

तदा चअ + चग = चक भविष्यति ।

अत्रोपपत्तिः । अकगच वृत्तान्तश्चतुर्भुजम् ।

अतः अक · चग + अच · कग = अग · चक (४प्र)

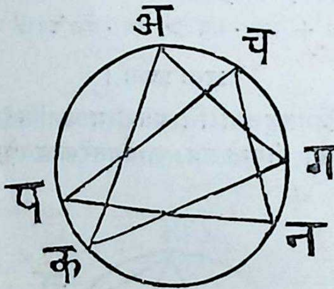
अक (चग + अच) = अग · चक

अत्र अक = अग

∴ चग + अच = चक उपपन्नं यथोक्तम् ।

षष्ठः प्रश्नः ।

एकवृत्तान्तस्थयोस्तुल्यत्रिभुजयोर्भुजघातयोर्या निष्पत्तिस्तदाधारनिष्पत्त्या समा भवति ।



अकग, चपन समानत्रिभुजे स्तः ।

अत्र अक · कग : चप · पन = अग : चन भविष्यति ।

अत्रापपत्तिः । अत्र प, क बिन्दुभ्यां स्वस्वाधारोपरि ल, लं संज्ञकौ लम्बौ ।
अकगच वृत्तव्यासः = व्या । तदा द्वितीयप्रश्नोक्त्या—

पच · पन = ल · व्या ।

एवं अक · कग = लं · व्या ।

∴ पच · पन : अक · कग = ल : लं

परञ्च $\triangle$ पवन $= \frac{\text{चन} \cdot \text{लं}}{२}$

$\triangle$ कभग $= \frac{\text{अग} \cdot \text{लं}'}{२}$

त्रिभुजयोःसमत्वात्—

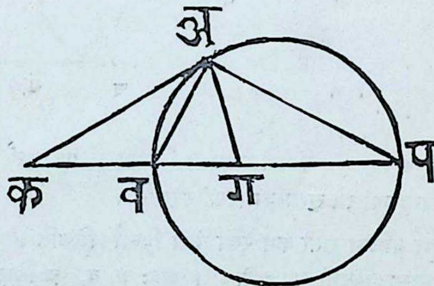
चन · ल = अग · लं'

∴ ल : लं' = अग : चन

∴ पच · पन : अक · कग = अगः चन उपपन्नं यथोक्तम् ।

सप्तमः प्रश्नः ।

यदि त्रिभुजे आधारः शेषभुजयोर्निष्पत्तिश्च निर्दिष्टा तदा शिरः कोणभ्रमणमार्गो निर्णीयताम् ।



अकग त्रिभुजे यदि कग आधारस्तथा अक, अग भुजयोर्निष्पत्तिश्च स्थिरा तदा अ बिन्दुभ्रमणमार्गोऽन्वेष्टव्यः ।

कल्प्यते कअग कोणस्यान्तः कोणार्धकारिणी रेखा अव तथा बहिः कोणार्धकारिणी अप चास्ति । तदा

अक : अग = कवः वग = कपः गप (६–३)

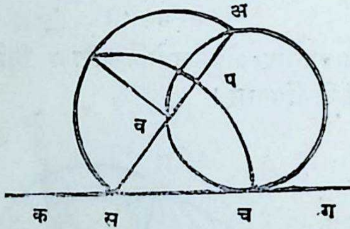
∴ व, प बिन्दू स्थिरौ भवतः ।

परञ्च पअ, वअ रेखे बाह्याभ्यन्तरतः

कअग कोणमर्धयतस्तेन पअव कोणः समकोणसमः स्यात् ।
∴ वप व्यासोपरि यद्वृत्तं तद्वृत्तपरिधावेव
अ भ्रमणं भवतीति, यथोक्तमुपपन्नम् ।

अष्टमः प्रश्नः ।

तादृशं वृत्तमेकं विधेयं यन्निर्दिष्टबिन्दुद्वयगतं निर्दिष्टरेखां च स्पृशेत् ।



अत्र अ, व बिन्दू तथा कग रेखा च निर्दिष्टा । एकं वृत्तं तथा विधातव्यं यत् अ, व बिन्दुभ्यां निःसृत्य कग रेखां स्पृशति ।

अव रेखा वर्धिता सती कग रेखायां स बिन्दौ मिलति । कल्प्यतेऽत्र अस, वस रेखयोर्मध्यसम्बन्धिनी सप=सच । अतः अ, व, च बिन्दुत्रयगतं वृत्तं कग रेखां च बिन्दौ स्पृशति ।

अत्रोपपत्तिः । यतो अस, व स रेखयोर्मध्यसम्बन्धिनी रेखा सप ।

∴ $\frac{\text{अस}}{\text{सप}} = \frac{\text{सप}}{\text{वस}}$

∴ अस · वस = सप^2 = सच^2

अतः सच रेखा अवच त्रिभुजोपरिवृत्तस्य स्पर्शरेखा स्यात् । ३–

अत उपपन्नं यथोक्तम् ।



द्वितीयसंस्कर ... द्वितीयसंस्करण !

ज्यौतिषाचार्य-ज्यौतिषतीर्थ--

प० श्रीमु... ठक्कुरकृतनवीनदामनाख्य...

इसकी विशेषत... पाठक लोग प्रथम संस्करण से ही भलीभांति प... इस द्वितीयसंस्करण ... काशीस्थ राजकीय संस्कृत कालेज के गणितमा... के सुभीते के लिये ... वर्षों के प्रश्नपत्र संग्रह अन्त में छापे गये हैं ... स्थलों में उत्तर कर... युक्ति भी बताई है। इसके अन्त में परि... सर्व-सामान्य-संस्कृताध्यायियों की वर्तमान गणितपद्धति का ज्ञा... दूर करने के लिए सुवर्ण में सुगन्धि सा काम किया गया है।

चलनकलन-प्रश्नोत्तर-विवर...

ज्यौतिषाचार्य-प० अच्युतानन्द झा विरचि...

विहार की आचार्य परीक्षा के अन्तिम खण्ड तथा गवर्नमेण्ट ... काशी की पोस्टाचार्य परीक्षा में निर्धारित 'चलनकलन' के चारों अध्याय के प्रश्नों के उत्तर तथा अन्य २ प्रश्नों के उत्तर भी अति स्फुटता के साथ सरल संस्कृत में छप गये। प्रत्येक गणित प्रेमी विद्यार्थियों तथा अध्यापकों को इसकी १-१ प्रति अवश्य पास में रखनी चाहिए। मूल्य अल्प नाममात्र ।।।)

सरलरेखागणित-

लेखक-ज्यौतिषाचार्य प० श्री... ...श्वरीप्रसाद द्विवेदी।

यह रेखागणित सरल संस्कृत में नवीन २ उपपत्तियों और संकेतों द्वारा परिष्कृत होकर प्रकाशित हुआ है। इस में परीक्षोपयोगी समस्त विषयों और कठिन स्थलों को इतनी सरलता से सिद्ध किया गया है कि प्रत्येक सुकोमलमति बालक भी थोड़ा सा अनुगम करके अपने आप उन विषयों का ज्ञान और अभ्यास कर सकता है। प्रत्येक प्रतिज्ञाओं की सिद्धि के लिये २-३ प्रकारों से उपपत्तियाँ कर दी गई हैं। जिस से किसी भी उपपत्ति को लिख कर परीक्षार्थी परीक्षोत्तीर्ण हो सकता है। साथ ही प्रथमाध्याय में २६० द्वितीयाध्याय में ५६ अभ्यास एवं जगह २ पर आवश्यक टिप्पणी तथा अन्त में छात्रों के सौकर्यार्थ अनेक वर्षों के प्रश्न पत्र भी दे दिये गये हैं। १-२ अध्याय।। मूल्य ... नाममात्र ।।=)

प्राप्तिस्थानम्—चौखम्बा-संस्कृत-पुस्तकालय, बनारस सिटी!